基礎セミナー資料「物理学の不思議」資料 (3)

途方もなく大きな数

—偶然から必然へ—

名古屋大学大学院理学研究科物理学教室
上羽牧夫[1]

要旨

大きな数といっても宇宙の星の数，地表の砂粒の数，日本政府の借金などいろいろあるが，ここでは身近な物に含まれている原子数を取り上げる．この数が途方もなく大きいために，私たちの目にするものは原子の世界とは違った著しい法則を示す.

1　原子を並べてみよう

私たちを取りまく物質がどのくらいの数の原子からできているかは，高校の化学で学習した．アヴォガドロ数というのがその目安である．水の化学式は H_2O で分子量は 18 だ．水 18 グラム，コップ 10 分の 1 杯は 1 モルの分子からなり，その数がアヴォガドロ数

$$N_{\mathrm{A}} = 6.02 \times 10^{23}\ 個\ \mathrm{mol}^{-1} \tag{1}$$

である．6 の後ろに零が 23 個も並ぶから，かなり大きな数であることは間違いない．その大きさを実感するために，水の分子を 1 列に並べるとどのくらいの長さになるか考えてみよう．

まず水分子の大きさを知らなくてはいけない．$18\mathrm{cm}^3$ の水は，一辺 2.62cm の立方体になり，一辺に $N_{\mathrm{A}}^{1/3} = 0.84 \times 10^8$ 個 (八千四百万個) の分子が並ぶから，一個の大きさは $2.62\mathrm{cm}/(0.84 \times 10^8) = 3.12 \times 10^{-8}\mathrm{cm}$，大体 $3 \times 10^{-10}\mathrm{m}$ の大きさだろう．さてこれを 6×10^{23} 個並べると

$$(3 \times 10^{-10}\mathrm{m}) \times (6 \times 10^{23}) = 1.8 \times 10^{14}\mathrm{m}. \tag{2}$$

[1]Makio Uwaha. E-mail:uwaha@nagoya-u.jp; http://slab.phys.nagoya-u.ac.jp/uwaha/

あるいは，1.8×10^{11}km となるが，これはなんと光が 1 週間かかって進む距離である:

$$(3 \times 10^8 \mathrm{m/s}) \times (60\mathrm{s/min}) \times (60\mathrm{min/hour}) \times (24\mathrm{hour/day}) \times (7\mathrm{day/week}) = 1.8 \times 10^{14} \mathrm{m/week} \quad (3)$$

アヴォガドロ数というのはこんなに大きな数だということを，しっかり感覚的に身につけておこう．以下は N_A が大きいために成り立つ不思議な法則の話である．

[**発表用課題 (全員)**] 地球を構成する原子を 1 列に並べたら，どれくらいの長さになるか見積もってみよう．

2 コイン投げ

ひとつのコインを投げれば，表の出る確率が 1/2，裏が出る確率が 1/2 である．同じコインを二つ投げたら，二つとも表になる確率が 1/4，二つとも裏になる確率が 1/4，表と裏が一枚ずつ出る確率が 1/2 である．1 枚ずつの確率が多いのは，どちらが表になるか二つの可能性があるからだ．そんなことは当たり前と思うかもしれないが，原子の世界では必ずしもこうならず，1/3 ずつの確率になったりすることがある．このことについては別の機会に説明する．ここでは常識の通用する普通のコインを考える．

コインの枚数を多くしたらどうなるか．10 枚投げたとき，表が出る枚数の確率の分布をグラフにしたのが，図 1(a) である．グラフは連続な曲線で描いてあるが，横軸の整数値のところだけが意味がある．N 枚投げたとき M 枚が表になる確率を $\mathrm{Prob}_N(M)$ と書くと

$$\mathrm{Prob}_N(M) = {}_N\mathrm{C}_M \left(\frac{1}{2}\right)^M \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-M} = \frac{N!}{M!(N-M)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (4)$$

$N = 10$ なら，$M = 5$ つまり 5 枚ずつになるときが確率最大だが，4 枚表，6 枚表ということも結構起きる．全部が表になる確率や全部が裏になる確率は 1/1024 である．何事も体で覚えることが肝心，ためしにコインを 10 枚全部表になるまで投げ続けてみるとよい．

[**実習用課題**] 5 枚のコインがすべて表になるまでコインを投げ続け，各回の表の枚数の記録をとる．またこれとは別に $2^5 = 32$ 回投げて同じ記録をとる．この結果を分析してみよう．

$N = 100$ の場合のグラフが図 1(b) である．もちろん 50 枚ずつの確率が最大だが，40 枚や 60 枚表が出る確率はそれに比べてまったく無視できるというほ

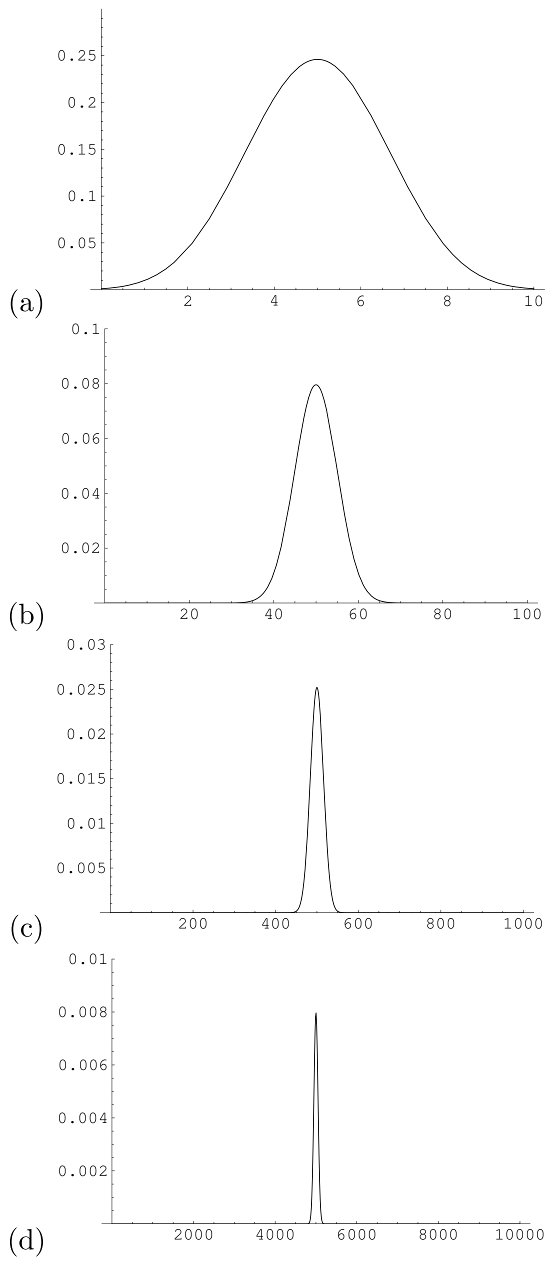

図 1: コイン投げで表の出る枚数の確率分布．投げるコインは，(a) 10 枚，(b) 100 枚，(c) 1000 枚，(d) 10000 枚．縦軸横軸の目盛りの違いに注意．度数分布の先端を滑らかに結んだ曲線の下の面積 (整数値についてのヒストグラムなら，その長さの総和) はすべて 1 である．

どでもない．しかし全部が表になる確率を計算すると，なんと

$$1/1267650600228229401496703205376$$

である．これは一生かかっても無理だから，がんばってやってみようなどとしてはいけない．$N = 10$ の場合と比べると無視できない有意な値を持つ幅が相対的に狭くなっている．$N = 1000$ や $N = 10000$ の場合をみればこの傾向はさらにはっきりする．一般にこのようなランダムな現象では，N 個のサンプルがあった場合平均値からのはずれは $\sqrt{N}$ の程度になることが分かっている．数学の得意な人は M の平均値 $\langle M \rangle$ と標準偏差 $\sqrt{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}$ を調べてみるとよい．式で書くと

$$\langle M \rangle \sim N \tag{5}$$

$$\sqrt{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle} \sim \sqrt{N} \tag{6}$$

ということだ．ここで記号「$\sim$」は，両辺の比が 1 と大きく違わない (たとえば 0.1 から 10 のあいだ) ということを意味する．これから言えることは，相対的な誤差は

$$\frac{\sqrt{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}}{\langle M \rangle} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{7}$$

ということだ．コインの枚数が多いときには，ほとんど間違いなく 50 パーセンくらいが表になるということである．

[**発表用課題 (分担者)**]　1 秒間に 1 回コイン投げができるとする，100 枚全部が表になるまでにどのくらい時間がかかるか?

[**自習用課題**]　最後の誤差についての関係式を導く部分は，正確な計算をしなかった．数学的に正確にやったらどうなるか?

3　箱の中の気体

　さてコイン投げで分かったことをもとに，次のような状況を考える．大きな直方体の箱の中に水蒸気が 1 モル，つまり質量にして 18 グラム入っている．この箱の丁度真ん中に仕切りを差し込んだら，箱の両側にはどれだけの水分子が入っているだろうか? 答えはもちろん左側に 9 グラム，右側に 9 グラムである．水分子が 1 個しかなく，分子が勝手に運動しているとすれば，左か右に 1 個あり反対側は空っぽである．分子がたくさんあってもそれぞれが勝手に運動しているなら，左に来る確率も右に来る確率も 1/2 なのでコイン投げと同じ状況に

なる．左側にも右側にも 1/2 モルの分子がはいり，その誤差はせいぜい 10^{12}，つまり 1 兆個くらいである．これは莫大な数だが，1/2 モルからの相対誤差は 1 兆分の 1 に過ぎない．マイクログラムのさらに一万分の一だから，普通の測定手段では測れない誤差だ．物理の測定装置でこれ以上の精度を出すのは難しい．ちなみに物質の量の基準となっているのは 1889 年に以来[2]パリに保存されているキログラム原器である．この複製品が世界に配られ質量測定の基準になっているが，もとの原器との誤差はこの 100 年間で 7 マイクログラム程度だそうだ[3]．「産業技術総合研究所計量標準総合センター」の最新計測技術は 10^{-8} の精度を誇っている．しかしこれとても，先ほどの相対誤差よりも 1 万倍も大きいのだ! 箱の中の分子の運動についてほとんど何の知識もなくても，1 兆分の 1 の精度で分子数配分が予想できるとは驚くべきことである．

[**発表用課題**] 国際メートル原器は 1960 年に引退し，現在「メートル」は光の進む距離で定義されている．しかしキログラム原器はいまだに健在である．この理由を考えてみよう．またメートルの定義が何故，どのように変わったのか調べてみよう．

4　原子論の恩恵

前節の話は，水蒸気が分子からできていることが前提である．連続的に見えるいろいろな物質が，実は離散的なツブツブの集まりだと言うことが議論の前提として非常に大事だ．ファインマンは有名な教科書[4]の中で「もしもいま何か大異変が起こって，科学的知識が全部なくなってしまい，たった一つの文章だけしか次の時代の生物に伝えられないということになったとしたら，最小の語数で最大の情報を与えるのはどんなことだろうか．私の考えでは，それは原子仮説だろうと思う.」と書いている．原子論はギリシア時代に，レウキッポス，デモクリトス，エピクロスなどによって考え出された．もちろんこの時代に原子論を証明することはできるはずもないが，身の回りの観察から原子の存在を推論していたのだ．

私たちが今考える意味での原子論が確立するのは近代になってからである．ラ

[2] メートル法が最初に制定されたときは「一辺が 10cm の立方体の体積の，最大密度における蒸留水の質量」ということだった．

[3] 日本にあるキログラム原器はパリの原器の 6 番目の複製で，1889 年の質量は 1kg+0.169mg ということになっている．その後，約 40 年に 1 回，パリに運んで検査が行われている．第 1 回目の検査の結果は 1kg+0.149mg，第 2 回目は 1kg+0.170mg であった．1889 年から 1992 年に行われた 3 回目の検査の結果は洗浄前の重量が 1kg+0.208mg，洗浄直後の重量が 1kg+0.176mg であった．国際度量衡局の研究によれば，洗浄したあと短期間に $10\mu g$ の質量増加があり，その後 $1\mu g$/year 程度の質量増加があることが分かっている．日本には No.6 のほかに No.60 という副原器がありその質量は 1kg+0.172mg である．

[4] ファインマン 「ファインマン物理学 I　力学」坪井忠二 (訳)，岩波書店，1967 年

(a) (b) (c)

図 2: (a) ラボアジェ，(b) ドルトン，(c) アヴォガドロ

ヴォアジェ(Antoine-Laurent de Lavoisier: 1743-1794) は化学反応によって質量が変化しないことを示し，さらに元素の概念を確立した．近代の原子論は 1803 年，ドルトン (John Dalton: 1766-1844) によって提案された．しかし，19 世紀のあいだは原子論が本当に受け入れられたとは言いがたい．このころの物理学史の年表を見ると

1662 ボイルの法則.

1687 ニュートンがプリンキピアを出版.

1784 ワットが蒸気機関を発明.

1787 シャルルの法則 (1802: ゲイ-リュサックの法則).

1803 **ドルトンの原子説**.

1811 **アヴォガドロの分子仮説**.

1827 **ブラウン運動の発見**.

1831 ファラデーが電磁誘導を発見.

1842 マイヤーがエネルギー保存の法則を提唱.

1843 ジュールが熱の仕事当量を測定.

1847 ヘルムホルツによりエネルギー保存の法則 (熱力学の第 1 法則) が確立.

1848 トムソンが絶対温度と絶対零度の提唱.

1850 クラウジウスが熱力学の第 2 法則を定式化.

1860 **マクスウェルの気体分子運動論**.

1865 マクスウェルが電磁気学を定式化.

1877 エントロピーに関するボルツマンの原理.

1883 マッハ「歴史的-批判的に見た力学の発展」で原子論を否定.

1900 **プランクがエネルギー量子を導入**.

1902 ギブスが統計力学のアンサンブル理論を定式化.

1905 **アインシュタインのブラウン運動理論**. ネルンストが熱力学の第 3 法則を発見.

1906 ボルツマンが自殺 (オストヴァルト，マッハのいじめが原因?).

1908 **ペランがアインシュタイン理論を検証**. ランジュヴァン方程式.

1925 ハイゼンベルグが行列力学を提唱.

1926 シュレディンガーが波動方程式を提唱.

19 世紀に急速に物理学が進歩したことが分かる．とくに世紀の後半に熱力学と，やや遅れて分子運動論，統計力学が作られていった．太字のものが原子論がらみの発見だ．20 世紀に入るとすぐにプランクのエネルギー量子が提案され原子物理学の時代に突入するのだが，マッハに代表される原子論を否定する立場もまだ強力で統計力学の創設者であるボルツマンが悩んでいた時代でもある．

1905 年にアインシュタインがブラウン運動の理論を発表し[5]，3 年後にペランが実験的にこれを検証して初めて原子論が疑いのないものとして受け入れられたのだ.

[**発表用課題 (全員)**] あなたがタイムマシンに乗って江戸時代に行き，そこで柔軟で理解力のある「科学者」に会ったとしたら，あなたは物質が原子からできているということを相手に伝えられるか? 原子論を受け入れるよう，どうやって説得するか?

5 無知の知

私たちは水蒸気中の分子の運動の様子についてほとんど何も知らないのに，箱の中の分子数をかなり正確に予言することができる．もちろん，分子がいろいろな方向にいろいろな速さで飛び交っていることを知っているから，まったく何も知らないわけではない．水が膨大な数の同じ種類の小さな粒子からなり，気体中ではそれが自由に飛び回っているという，ギリシア以来 2 千年の歴史をかけて築いたこの知識が非常に重要なのだ．ここで注目したいのは，コイン投げの問題にしろ，分子数の問題にしろ，私たちは，いろいろな判断に無知であることをむしろ積極的に利用しているという点だ．投げたあとのコインの運動は正確に計算できるはずのものだが，投げ方はとても表裏を思い通りに出すほど正確にはコントロールできない．だが一つ一つの表裏は分からなくても，たくさん投げたときの表裏の割合は正確に当てられる．数が多いほど正確になる理由は，(4) 式で計算される表の割合が 49 パーセントから 51 パーセントの間になる場合の数が，0 パーセントから 1 パーセントの間になる場合の数より圧倒的に多いからである．このとき個々のコインが表か裏かを問題にしていないことが大切な点だ．分子一つ一つが今どこにいるかは分からなくても，左右の箱に分子が分配される割合は正確に当てられる．

---

[5]アインシュタイン自身の言葉によると「⋯ ボルツマンとギブスのすでに発表されていた研究に通じていなかったので，私は統計力学とそれにもとづく分子運動論的な熱力学を展開した．私の主目的は，一定の有限な大きさの原子の存在を確証する事実を発見することであった．ブラウン運動の観測が古くから有名であったのを知らずに，私は原子論的理論が，微視的粒子の観測できるような運動の存在をみちびくのを発見した.」(「わが研究のあと」より,「アインシュタインと現代物理学」所収，東京図書，1958 年)

図 3: ウィーン大学にあるボルツマンの胸像.

分子数の場合では，正確に予想できるのは，たとえば「左の箱に何パーセントの分子がいるか」といった，あるひとつの巨視的な情報に対応する．箱を 2 等分したときの分子数の配分が 50 パーセントずつの場合と 10 パーセントに 90 パーセントの場合では，個々の分子がどちら側にいるかを区別して数えたときの原子レベルの**微視的な状態の数** (数学で「場合の数」と呼んだもの) が，まったく違っている．その結果，半分が左側にいるということが確定的な情報となる．そして，われわれが普通必要とする巨視的な情報は，微視的な状態についての情報をまったく問題にしていないのである．10 パーセント以下の分子しか片側にいない可能性はまったくゼロと言ってよい (数学のゼロとは「無限小」違う物理のゼロ)．最初に見たようなマクロな系の分子数の膨大さによって,「個々の分子がどちらにいるか分からないから，同じだと思いましょう」という，一見いい加減な仮定にたった予言が確定的なものになるのである．みんなは「静かに置いておいた箱の左側半分に 40 パーセント以下の分子しかない状態が観測されたら私の命を差上げる」という賭けをしてもかまわない．何故なら，たまたまそのような状態が実現されるには，たぶん宇宙の寿命より長い時間待たなくてはならないから.

補足：場合の数とエントロピー

ひとつの巨視的な状態 (たとえば仕切りのある箱の左側半分と右側半分に等量の空気が入っている状態とかコインを大量に投げたときその半分が表にある状態といった) にどれだけの微視的な状態が対応しているか (コインの表裏で言えば場合の数) が重要だと言うことに最初に気づいたのはボルツマンだ．この「場合の数」にあたるものの対数を**エントロピー**と呼ぶ．ボルツマンはこのエントロピーの考え方を使って，統

計力学という微視的な世界と巨視的な世界の関係をつける方法を考え出した．コイン投げの場合の数は簡単に数えられるが，気体が半分ずつ入っている状態の場合の数をどう数えるかは難問だ．ボルツマンが統計力学を作ったのは 19 世紀末だが，20 世紀にはいって量子力学が発見されて初めてこの問題の正しい解決が可能となった．

このように原子の世界について，**数が多いことを知っていれば「無知」を積極的に利用して，身の回りのマクロな世界について確定的な予言ができる**．物理学の重要な構成要素に「熱力学」と「統計力学」がある．「気体の体積を半分にすればその中の物質の量は半分になる」という類の主張をするのが**熱力学**で，「分子が勝手に運動していればそうなる確率が圧倒的に大きい」という類の主張をするのが**統計力学**である．もちろん，熱力学や統計力学によって，これほどには明らかでない不思議で有用な主張がたくさん可能になるのだ．私たちの身の回りの物質[6]の性質は，その物質を構成する原子や分子の種類を知れば，統計力学によってほとんど予言できてしまう．そして物性物理学という分野は量子力学と統計力学を使って物質の性質を解明することを目的にしている．

[**瞑想用課題**]　「たまたまそのような状態が実現するには，たぶん宇宙の寿命よりもはるかに長く待たなくてはならない」という主張は「確率」を「時間」に翻訳しているので，あいまいである．どう考えたらよいか，本当かどうか考えてみよう．

6　読書案内

原子論が確立していく過程を知ることは，物理学を学ぶ上で非常に教育的である．原子論の真髄となる考え方の歴史を追った

江沢洋「だれが原子をみたか」 岩波科学の本，1976 年

はすばらしい本だ．秋川渓谷での子供たちによるパスカルの実験の再現には感動を禁じえない．中学生から研究者までにおすすめの良書なのだが，残念なことに絶版になっている．最近の理科教育の衰退を憂うとき，このような良書の復活を強く望む．

原子論はギリシア時代の思索の中で生まれた．その原点に触れたいひとには，エピクロス派のローマの詩人による

ルクレティウス「万物の根源/世界の起源を求めて」
塚谷 肇 (訳)，近代文芸社，2006 年

が興味深い．岩波文庫で「物の本質について」(こちらが原題に近い) という表

---

[6]生物のような複雑なものは一応別にしておく．

題で出ていたが残念ながら絶版になっていた．探したところ，上の本が見つかった．中は見ていないが同じ本だろう．

メートル法が制定されたときの事情と，メートルの長さの決定のためにフランスの科学者がどれほどの苦労をしたか，疑惑データのもみ消しなど興味深い歴史が

ケン・オールダー「万物の尺度を求めて—メートル法を定めた子午線大計測」
吉田三知世 (訳)，早川書房，2006 年

に書かれている．メートル法制定後の普及の障害[7]や，定義の変遷についても解説されている．

[7]今だにメートル法を採用していない国がある．この国では温度も華氏で測る．