

自然の階層構造と超階層的な構造

—絶対的な大きさと相対的な大きさ—

名古屋大学大学院理学研究科物理学教室

上羽牧夫¹

要旨

世の中のものは原子からできている。それが積み重なって多層的な構造を作っているのがわれわれの生きている世界だ。また原子を細分化していても玉ねぎの皮をむくように下層の世界が現れる。このように物質世界は基本的には絶対的な尺度を持った階層構造をなしている。ただし、いろいろなスケールの干渉によって、それが時々消えてしまうことがある。

1 土農工商—階層構造の成立

江戸時代には「土農工商」と言う身分制度があった。このような身分制度は社会のあるシステムが安定に続くが発達してくるようだ。現代の日本も表向きは天下泰平の時代が続き、それが新たな身分制を生み出しているかのように思える。このような身分制度や階層構造は、社会システムが別な形に変わる革命期に大きく動揺し、場合によっては消失する。ここで社会体制の問題を議論するつもりは毛頭ないが、これに似て、自然界にも**階層性**の形成とその消失という現象がある。

自然の構造が階層的になっていることは、いまさら言うまでもない。電子、陽子、中性子といった素粒子が集まって原子を作り、原子が結びついて分子ができる。原子や分子が規則的に並ぶと固体の結晶ができる。私たちの周りにある金属は小さな結晶の集まりである。分子の中には蛋白質のような巨大なものもあるし、小さなユニットが鎖のようにつながった高分子もある。太古の昔、どのような姿だったのかまだ謎に包まれているが、大きな分子が集まって生命が誕生した。生命体は自らを膜に包んで外界から守る。生物の単位となるのはこの細胞である。細胞の中では蛋白質が集まっていろいろな構造を作り出している。細胞は組織をつくり、組織は器官をつくり、その集合体が生物個体である²。

¹Makio Uwaha. E-mail:uwaha@nagoya-u.jp; <http://slab.phys.nagoya-u.ac.jp/uwaha/>

²生物とは何かと言うのは簡単な問題ではないが、一番重要な特徴は**代謝**にあると私は思う。地球のようなシステムでも水や炭素の循環など代謝と似た運動はあるが、きわめて部分的なものだ。

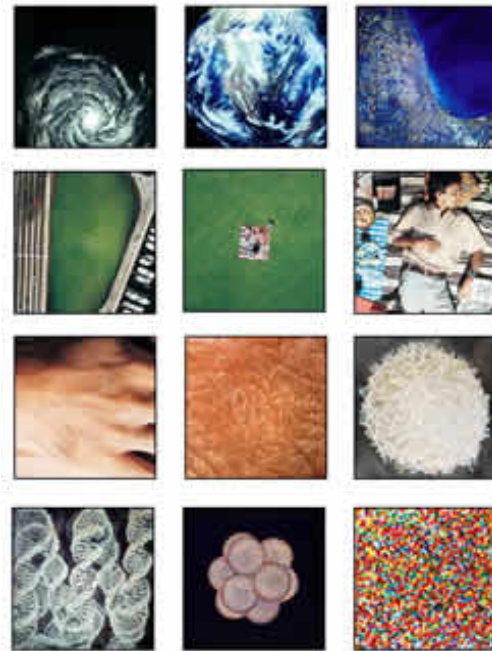


図 1: Powers of 10. (Eames Office のウェブページより)

生物は集団を成して生活し，家族や会社などの社会的構造を持つ．生物は惑星の上に生息し，惑星は太陽の周りを回る．太陽は巨大な銀河系の渦巻きの腕の中に位置している．銀河は，さらに大きな集団を作り，銀河集団は大宇宙の中に網の目のように分布している．この我々の認知した大宇宙の外に何があるか，それは多分永遠の謎だろう．

参考：Powers of Ten (10 のべき乗)

家具デザイナーとして著名だったチャールズ・イームズとその妻、レイが1968年に作った有名な教育映画をみると自然の階層的な構造がよく見える．1メートルという人間的な大きさから視野を連続的に10倍ずつにしていくと，見えるものが次々と変化して大宇宙にいたる．逆に十分の一ずつにしていくと，人体の組織，細胞から，原子や素粒子の世界にいたる．今なら，Google Earthを使えば， 10^2 から 10^7m の5桁くらいの範囲なら地上の任意の場所でこれが可能だ．

階層性ということは，いろいろな側面から見るのが大切だ．物理的に最も単純なのは大きさで分類することだが(図3)，これに密度を加えるとその物理的特徴が良くわかる(図4)．図からわかるように，いろいろな対象を大きさと密度で配置すると三つのグループに分かれる．密度が $10^{15}\text{g/cm}^3(10^{18}\text{kg/m}^3)$ くらいのものがいくつか．この密度は核力と呼ばれる強い相互作用で決まっているが，該当するのは核子，原子核と中性子星くらいでメンバーは少ない．重要

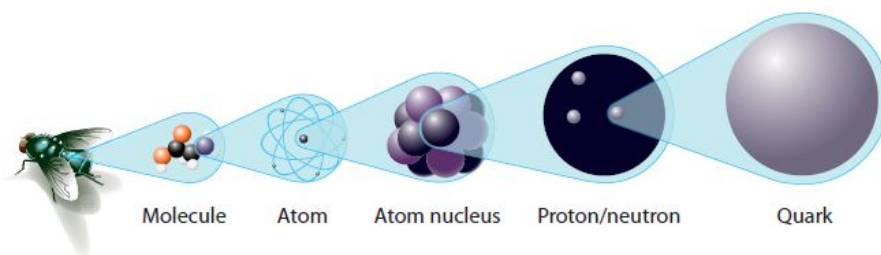


図 2: 分子より小さい階層. (ノーベル賞のウェブページより)

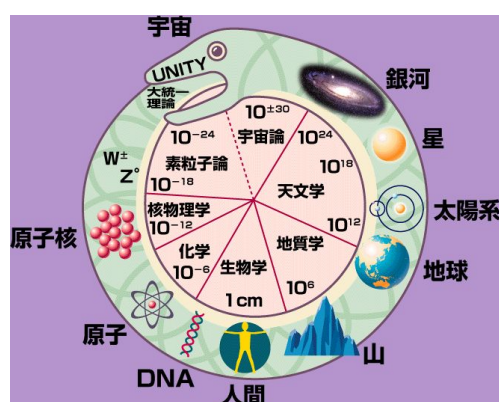


図 3: 尾を飲み込むウロボロスの蛇 (須藤靖氏のウェブページより). グラショウが使ったこの図はよく引用されるが、少々単純化しすぎている点が問題だ.

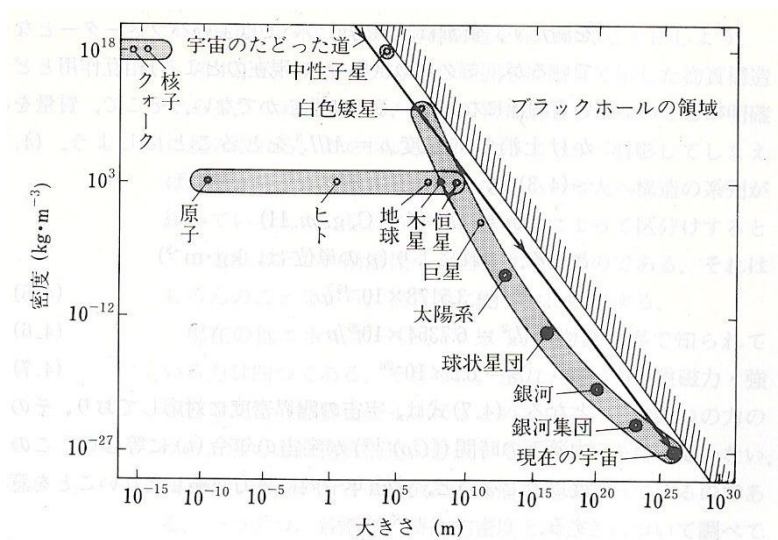


図 4: 大きさと密度から見た自然の階層. (池内了「宇宙と自然界の成り立ちを探る」(サイエンス社) より)

な物質の一群が密度 $1\text{g/cm}^3 (10^3\text{kg/m}^3)$ くらいのところにある。これは電磁的相互作用と量子効果で決まる密度で (次節参照), 原子から地球までのあらゆる物を含み, 物性物理学, 化学, 生物学, 地球科学などの対象で, 物質の多様性や豊かさを生み出している世界だ。この一群の特徴は, 単に大きさの大小ではなく, 真に階層的な構造と組織を作っている点にある。次節からその特徴をいくつか見ていくことにする。最後の一群は, 中性子星から宇宙全体にいたる, 密度と大きさが連動して変わるもので, 重力が主役を演ずる世界だ。

[自習用課題] 三つのうち最後のものだけ密度が定まらないのはなぜか?

[発表用課題] 第2の物質群を, 特徴的な大きさによって 10^{-10}m から 10^7m まで代表的なものを選んで並べてみよう。必ずしも直線的に並べるのがいいとは限らない。階層構造の意味を考えながら, 表現の仕方を工夫してみよう。またその特徴的なサイズが何によって決まっているのか考えてみよう。

第2節では, 物質世界のスケールがどのように決まっているのかをまず考え, 古典力学の世界との対照を見る。第3節で中間スケールの現象が決まる例として波を取り上げる。第4節では, スケールが消えてしまう例を示そう。

2 原子—物質の構造単位—の大きさ

多様な物質には, それぞれに特徴的な大きさと時間のスケールがある。まずその単位であり, **通常物質の構成単位である原子**ひとつに着目してみよう。ひとつの原子の中では, 陽子と中性子からできた原子核の周りを電子が雲のごとく巡っている。電子の質量は $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ キログラム (kg) で, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ クーロン (C) の電荷を持っている。負の電荷を持つ電子は正の電荷を持つ原子核に引かれているが, クーロンの法則 $F = k_0 Z e^2 / r^2$ でこの強さを決める定数は $k_0 = 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ である (高校の教科書では k_0 , 大学の教科書には $1/4\pi\epsilon_0$ と書かれている)。電子のような小さいものは量子力学の法則に支配されている。量子効果の特徴づけるのは**プランク定数** $\hbar = h/2\pi = 1.1 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ である。ここに現れた4つの定数を使って長さの次元を持つ量をただひとつ作ることができる。それは $\hbar^2/k_0 m_e e^2$ という組み合わせだ。数字を入れてみると

$$a_B = \frac{\hbar^2}{k_0 m_e e^2} = 5.3 \times 10^{-11} \text{m} \quad (1)$$

となる。この長さは**ボーア半径**と呼ばれ, 原子ひとつの大きさの目安となる。同じ四つの定数を使って時間の次元を持つ量を作ってみると

$$t_a = \frac{\hbar^3}{k_0^2 m_e e^4} = 2.4 \times 10^{-17} \text{s} \quad (2)$$

という原子内の運動の特徴的な時間スケールができる。これに光速 $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ をかけた 10^{-8}m は原子から放出される X 線の波長と同程度になる。そ

の逆数を 4π で割った

$$R = \frac{k_0^2 m_e e^4}{4\pi c \hbar^3} = 1.1 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (3)$$

はリュードベリ定数と呼ばれ原子によって放出，吸収される光のスペクトルを表す大事な量である。

[自習用課題] 上のことを自分で確かめよ。

解説：何故原子の大きさが決まるか

このあとにも例が出てくるが，ある尺度が決まるのはたいていの場合二つの作用の拮抗によってである．原子核と電子の間に働くクーロン相互作用の引力は原子核と電子の距離を縮めようとする．しかし量子力学によると，狭いところに閉じ込めようとすると不確定性関係によって運動量が大きくなりエネルギーも大きくなってしまいうので閉じ込めきれない．電氣的なエネルギーと運動エネルギーが釣り合うところで大きさが決まるのだ．高校の教科書にはボーアの原子模型を使った説明があったはずだ．正確に何が起るかは量子力学を学ばば理解することができる。

原子の大きさを決めるためにプランク定数が必要だということは非常に重要な事実だ．私たちの周りの物を作っている基本的な力は，万有引力と電磁力だが，古典力学とこの二つの力では大きさを決めることはできない．何故なら，運動方程式を解いても，大きい運動は時間がかかり，小さい運動は時間が短いということしか分からないからだ．よく知られた，惑星の公転半径 R の3乗と公転周期 T の2乗が比例する ($R^3 \propto T^2$) というケプラーの法則を例にとろう．このケプラーの法則は，大きさ10センチの太陽を中心とした公転半径1メートルくらいの惑星があったとしても，1年の時間が短くなるだけで同じように成立する．電磁氣的なクーロン力や万有引力の作り出す古典ニュートン力学の法則は，ミニ太陽系の半径1センチの惑星の上に身長1ナノメートルの生物が生息しているという空想を許す³．巨大な物体の運動と小さな物体の運動が，物差しの目盛りと時計の刻みを適当に変えれば区別がつかない．このような法則を**力学的相似則**と呼ぶ．原子の大きさが決まるためにはニュートン以来の相似則を破る必要があったのだ．

[自習用課題] 万有引力による運動を考えてみよう．高校の物理で習った運動方程式は $f = ma$ だが，これはもちろん

$$\mathbf{f} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (4)$$

³子供のころ，原子のなかでは電子が原子核の周りをまわっているという話を聞いて，電子の上に極微小な生物がいて地球のような世界があるということはないのかと空想したような記憶がある．「ありえない」と言えるのだろうか？

と書ける．万有引力による力は，太陽を座標原点にとり，惑星の位置を $\mathbf{r}$ とすると

$$\mathbf{f} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (5)$$

と書ける．($\hat{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{r}$ の方向を向いた単位ベクトル．つまり $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ ．) ここで， M は太陽の質量， m は惑星の質量， G は万有引力定数とすれば，これを使って太陽系の惑星の運動を記述できる．上の式に代入すると

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (6)$$

となる．この微分方程式を満たす時間の関数としての座標 $\mathbf{r}(t)$ が惑星の軌道運動を表す．さて，もし $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$ がある惑星の軌道を表す解だったとしよう．これを a 倍に拡大した $\mathbf{r} = a\mathbf{R}(t)$ は，もとの (6) 式の定数を少しだけ変えた式を満たす⁴この変化はもとの式の時間を b 倍した結果とみなせる． b と a の関係を求めよ．この結果は， $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$ の具体的な形が分からなくても，ケプラーの発見した軌道半径と公転周期の関係を証明したことになっている．静電気のクーロン力も，反発力にもなることと，その強さ (定数の大きさ) を別にすれば，万有引力とよく似ており，同様にこの相似則が成り立つ．

量子力学によってはじめて存在を保証された原子，この原子が単位となって私たちを取りまく物質はできている．その構造は基本的に二つのタイプに分かれる．ひとつは原子が分子を作り，その分子が何種類か集まって複雑な分子を作るといふタイプのもので，アミノ酸から蛋白質へという方向への流れである．いろいろな種類の複雑な分子が集まって生命となる．**複雑な階層構造**は，それぞれが特徴的な大きさと運動の時間スケールを持ち，その頂点に人間を作り出した⁵．もうひとつは，**同じものがたくさん集まって一様な物質を作る**タイプのもので，伝統的に物理学が対象としてきた比較的わかりやすい物質である．ここでは簡単のため後者のみを取り上げ，その運動の一例を見てみる．

3 スケール可変な世界—水面の波

原子や分子がたくさん集まると，固体，液体，気体といった特徴的な様相を示す．同種のもものが集まってできる一様な状態は**相**と呼ばれる．この状態の物をいくら眺めていても，人間の感覚でとらえられる範囲では，原子がもたなくなっていることを示す兆候はほとんど何もない．古代人が原子論を提唱したのは空想力の豊かさゆえであり，原子が実在するということは，20 世紀になるまで人々の確信にはならなかった．しかしいったん原子論が世の中に受け入れられると，百年足らずの間に，人間は走査トンネル顕微鏡 (STM) という原子 1 個 1 個を操る道具まで手に入れた．

⁴バネや振り子の運動の場合は，力は釣り合いの位置からの変位 x に比例し，引き戻す向きに働く．この場合 $f = -kx$ だから運動方程式は $m d^2x/dt^2 = -kx$ ．ここで $x(t)$ がこの運動方程式を満たすとすると，変位の大きさが a 倍になった $ax(t)$ も方程式の解だ．つまり振幅が変わっても時間のスケールを変える必要がない．

⁵進化の頂点がヒトであるというのは，もちろん人間の勝手な思い込みに過ぎない．しかしここであえて「ゴキブリの方が人間よりもエライ」という必要もない．

[**発表用課題**] 現在、原子1個1個を区別できる手段はいくつか開発されている。どんなものがある、どんな原理で働くのか調べてみよう。(キーワード: 電子顕微鏡 (electron microscope: EM), 電界イオン顕微鏡 (field ion microscope: FIM), 走査トンネル顕微鏡 (scanning tunneling microscope: STM), 原子間力顕微鏡 (atomic force microscope: AFM) など)

一様な相は温度や圧力などの条件が変わると、他の相に突然移行することがある。この現象は相転移と呼ばれる。水と氷、水蒸気と水のように、ふたつの相が同時に存在するときには、その境界に**界面**が現れる。水面や氷の表面がそれである。界面はいろいろな形を持つ。液体の表面は液体が流れることによって自由に形を変える。水の表面は波立つ。これに対し固体の表面は容易に形を変えることはない。また水とは違って氷の表面は雪の結晶のような美しい複雑な形を持ちうる。これは固体ができるとき、つまり原子が規則正しく並んで結晶を作るときに現れる表面の形である、これらの形態にも特徴的なサイズがある。だがそれは分子のサイズとは一見無縁のものである。

衛星軌道上のスペースシャトルの中で水をこぼすと丸い水滴となって空中に浮遊する。これは水の表面では液体内部の状態より一分子あたりのエネルギーが大きくなってしまうので、エネルギー上昇を最小限にするため「表面張力」と呼ばれる力が働くためである。表面張力係数、つまり単位面積当たり表面エネルギーの大きさを α [J/m²] (= [kg/s²]) としよう。この水滴には波が立つ。この波はさざなみ、あるいは**表面張力波**と呼ばれる。この波の波長 λ [m] (あるいは波数 $k = 2\pi/\lambda$ [m⁻¹]) と振動数 ν [s⁻¹] (あるいは角振動数 $\omega = 2\pi\nu$ [s⁻¹]) の関係を考えてみよう。水はもちろん分子からできているが、水が波立つときは分子がばらばらに運動するのではなくまとまって連続体として振舞う。したがって運動を決定するのは個々の分子の質量ではなくて、むしろ水の密度 ρ [kg/m³] が問題である。

[**自習用課題: さざ波**] 水滴が無限に大きいとき⁶ 物理量の次元を調べることによって、 ω , k , ρ , α の関係を求めよ。(答え: $\omega^2 = (\alpha/\rho)k^3$)

この課題の例にあるように、多くの場合、原子が見えない巨視的なスケールでは、現象を特徴づける長さは決まらない。上のさざ波の例では波長が長くなるとだんだんと復元力が弱くなり波の振動も遅くなる。現実の水面の波では、波長が長くなると、表面張力よりも、低い位置に動いて重力エネルギーを下げて水平になろうとする重力による復元力が効いてくる。この様な波を**重力波**と呼ぶ⁷。

[**自習用課題: 重力波**] 重力波での波数 k と角振動数 ω の関係はどうなるか推定してみ

⁶水滴の大きさが波長に比べてずっと大きく、その大きさが有限であることによる影響を無視してよいときのことをこう表現する!

⁷これは一般相対性理論を知らなくても予言することが出来る!



図 5: 水の界面, 2 態. (葛飾北斎画, Kenneth G. Libbrecht 写)

よう. 地表での重力の強さを特徴づけるのは重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$ である. (答え: $\omega^2 = gk$. この場合には, 振子の周期が錘の質量によらないのと同じように, 復元力の大きさが質量に比例するので慣性の効果と打ち消しあい, 液体の密度は現れない. ガリレオが発見した落体の法則と同じことだ. この波も表面張力波と同じで波長はどんな値でもかまわない.)

振動数と波数が比例していないときは, 波の伝わる速さは $v_g = d\omega/dk$ で与えられ (**群速度**と呼ばれる), 波長 (波数) によって変わる. 表面張力波では $v_g = (3/2)\sqrt{gk/\rho} = (3/2)\sqrt{2\pi\alpha/\rho\lambda}$ となり波長の短い波ほど速く伝わる. 重力波では $v_g = \sqrt{g/2k} = \sqrt{g\lambda/2\sqrt{2\pi}}$ となり, 波長の長い波ほど速い. 現実の波の振動数は両方を加え合わせた

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho}k^3 + gk \quad (7)$$

になっているので, 波長の短い波は表面張力波, 長い波は重力波と考えてよい. アメンボが作る波紋は表面張力波で, よく観察すると外側ほど波長が短い. 逆

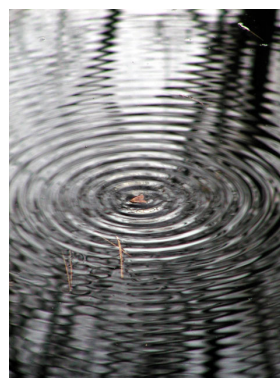


図 6: アメンボの作る表面張力波と水面に落ちた蛾が作る重力波.

<http://fauna.blog34.fc2.com/blog-date-200809.html>, <http://ixy-nob.blog.so-net.ne.jp/2006-03-09>



図 7: チリ地震津波 (「志津川町チリ地震津波災害 30 周年記念誌」より), スマトラ島沖津波 (Anders Grawin 写).

に石をジャボンと投げ込んだときに広がる波は重力波で外側ほど波長が長い.

Coffee Break: 津波

地震のときに発生する津波も重力波のひとつである. 大洋を渡る津波は非常に波長の長い波で, 波長が海の深さ h よりも長いのでその伝わる速さはむしろ水深で決まる. 限られた深さの海を伝わる波の振動数と波数の関係は $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ となることがわかっている. ここで $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ は双曲線関数と呼ばれる関数のひとつで, $x \ll 1$ ならば $\tanh x \approx x$, $x \gg 1$ ならば $\tanh x \approx 1$ である. 太平洋のような深い海 (水深 $4000\text{m} = 4 \times 10^3\text{m}$) では長波長の波の伝わる速さは $v_g \sim \sqrt{gh} \sim \sqrt{10 \times 4 \times 10^3} = 200\text{m/s}$ となつて, 音速の半分以上 (時速に直すと 720km) である! 1960 年 5 月 23 日チリの沖合で起きた地震による津波は, 22 時間後に三陸海岸を襲い 142 名の命を奪った. 2004 年 12 月 26 日のスマトラ島沖の大地震でも津波が発生し, 被害はアフリカまで及び, 死者は 22 万人以上と言われる. 2010 年に再びチリで 50 年ぶりの大地震が起こった. 2 月 28 日には大津波警報が出され日本中が緊張したが, さいわい予想より津波の規模は小さく人的被害はなかった.

4 スケールの生成—二つの作用の競合

現実世界のものは, たいていはある特徴的な大きさ**特性長**を持つ. そしてその特性長はふつう二つの効果の競合によって決まる. よく洗ったコップの中に入った水面を見てみよう. 縁のところで水は引き上げられている. これは水とコップの接点に働く力の釣り合いで接触角が一定になるからだ. コップから少し離れると水面は水平に戻る. 水平に戻るまでの距離を毛管長と呼んでいる. つまり重力が強ければ, 水面はほとんど端のところまで水平になり, 濡れと表面張力が強ければ壁に上までへばりつくようになる. 端がわずかに持ち上がった状態で落ち着くのは, 両方の効果が競合してつりあっているからだ. 表面張力の効果と重力の効果が同じくらいになるのは二つの波の振動数が同じになる $k = \sqrt{\rho g / \alpha} = \sqrt{1 \times 980 \times 73} \approx 3.7\text{cm}^{-1}$ で, 波長に直すと 1cm くらいにな



図 8: ブスワ・マンデルブロ (Benoit Mandelbrot: from Wikipedia)

る。水に1円玉を浮かべたときやコップに水があふれそうになったとき周辺の水面の湾曲を特徴づける長さもこれである。

ここまでで言いたかったことは、わずかな例を強引に一般化すれば

1. 原子の大きさは、電子の電氣的な力を表す電荷 e と運動を支配する質量 m_e から、量子力学 (プランク定数 $\hbar$) によって決まっている。
2. 原子が粒々であることを無視できる大きさの現象は、働いている力に応じて大きさのスケールと時間のスケールが関係づけられている。
3. 二つの力や効果が競合する場合には、その両者のバランスによって大きさのスケールが決まってしまう。

ということになる。そして多くの場合に、それぞれを特徴づける特徴的な物理量の組み合わせで構造の大きさや運動の時間スケールが、あるいは空間スケールと時間スケールの関係が決まってしまう。この説明で使ったような方法を**次元解析**と呼ぶ。これは物理現象を見るときの大変な見方なので、これからみんながいろいろな問題に出会ったとき、まずこの方法を使ってみることを勧める。

5 スケールの消失—フラクタル

原子や分子などの同じ単位がたくさん集まってできる構造は、みんながよく知っている固体、液体、気体などだ。こういうものは、だいたい一様だから原子や分子からできていることにはなかなか気づかず、連続体だと思ってもその形や運動の様子が理解できる。前節で見たように、水滴とか波といった特定の大きさがそれぞれの事情で出現する。

しかし特別な場合には、特定のスケール (**特性長**と呼ぼう) が消えてしまうことがある。このようなことはたいてい、ある秩序が現れるか消えるかのぎりぎりのところで、たまに見られる。**相転移**に伴う**臨界現象**と呼ばれる現象だが、理解するにはいろいろ予備知識が要るので、今はお預けにしておく。だが「ス

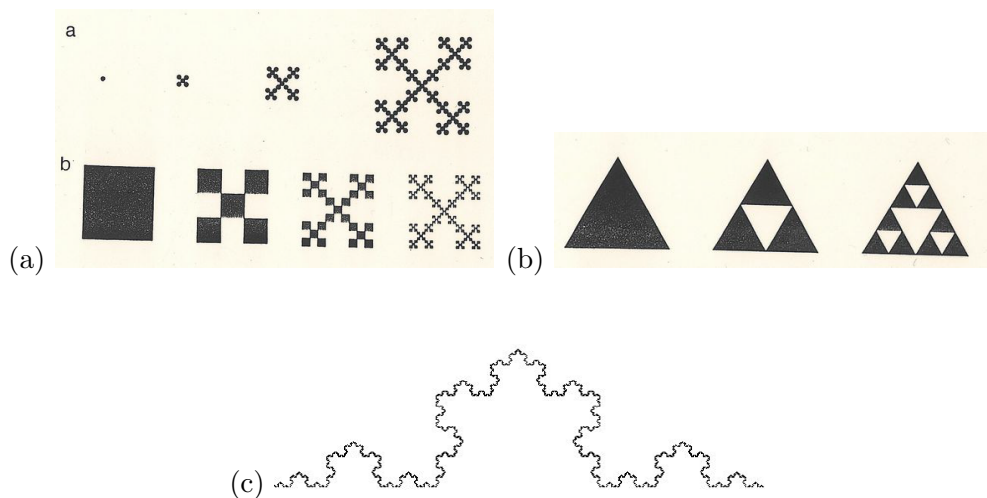


図 9: フラクタル図形. (a) a 拡大と, b 縮小によるフラクタル図形の作り方, (b) シェルピンスキー (Sierpinski) のガスケットと呼ばれる同様な図形. (T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, (World Scientific, Singapore, 1992) より), (c) トポロジ的には 1 次元のフラクタル図形でコッホ (Koch) 曲線と呼ばれる.

ケールが消えてしまう」とはどういう意味なのかだけは説明しておこう.

長さのスケールを失った構造の代表が**フラクタル** (fractal) というものだ. フラクタルは, マンデルブロ (Mandelbrot) によって提唱された概念で, 自己相似性を持つ幾何学的対象をさす. ある幾何学的対象の一部を拡大または縮小したときに, 自分自身とよく似たパターンになるものをこう呼ぶのである. 抽象的に言っても分かりにくいから, 簡単な規則にしたがって生成されるフラクタルパターンの例を示しておく (図 9). 図 (a) の a が, 拡大による作り方, b が縮小による作り方で, 両方を併用し実現に繰り返したものが完全なフラクタル図形だ.

図 9 の図形はすべて規則正しい図形だが, これらに劣らず重要なのは自然界に現れるランダムでフラクタル的なパターンで, 大河の分岐パターン, 多くの樹木の枝ぶりなどがそれである. 図 10 に示したのはイオン化傾向の違いによる金属の析出現象である⁸. 薄いセルのなかに硝酸銀溶液と銅板を入れておくと, イオン化傾向の違いから銅が溶解し代わりに銀が析出する. このとき一様には析出せず, いったん析出した物質の先端に凝集しやすいので, 枝分かれしながら, 銀樹の森が成長する. 巨木も, 木の一枝も, 森の下草のような小さな木もよく似た形態を持っている. ただし, この場合のフラクタル的な性質は, 溶液の濃度から決まるある長さ (相関長と呼ばれる) までしか維持されず, それより大きなスケールでは平均的には一様な構造になることが分かっている. つまり, 当

⁸S. Miyashita, Y. Saito and M. Uwaha, *J. Cryst. Growth* **283**, 533 (2005).

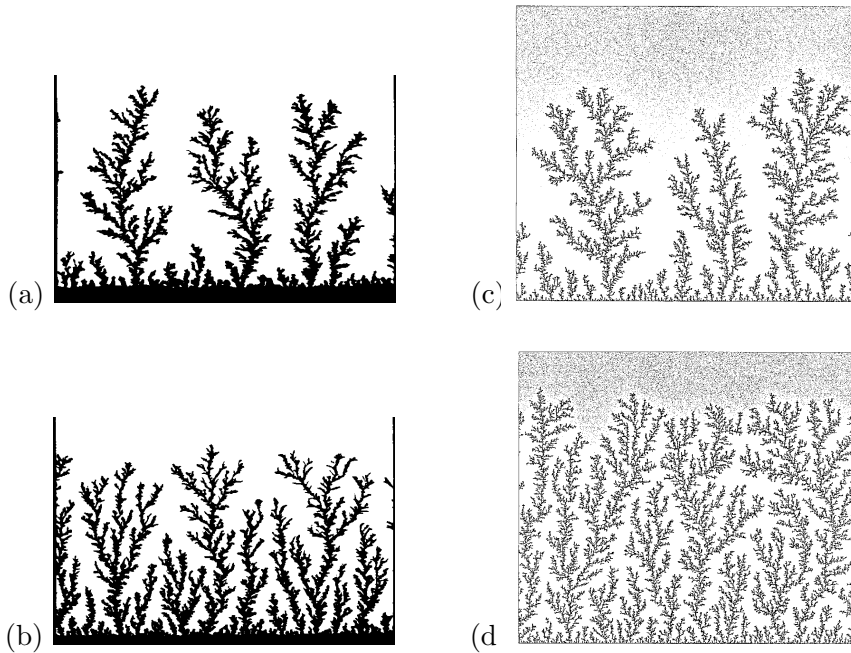


図 10: 2 次元的銀樹と格子気体からの凝集体左側は硝酸銀水溶液から銅板への銀の金属葉の析出. 溶質濃度は (a) 0.04 mol/l, (b) 0.06 mol/l. 右側は格子気体からの固体の成長のシミュレーション. 格子点あたりの気体密度は (c) $n_g = 0.1$, (d) $n_g = 0.15$. 系の大きさは 1024×900 .

然のことながら現実の世界ではフラクタル的な性質はある大きさの範囲でだけ成り立つ. 銀樹の森の下草の植生をいろいろな拡大率で観察すると, 相関長より小さいスケールではどの尺度でも様子がかわらないフラクタルの特徴を持っている (図 11).

フラクタル構造を特徴づける量が**フラクタル次元** (fractal dimension) だ. 通常の幾何学的対象は, 1 次元であれば, それを物理的に実現する質量 M は長さ l の 1 乗に比例し, 2 次元であれば長さの 2 乗に, 3 次元であれば 3 乗に比例する. つまり

$$M \sim l^{d_f} \quad (8)$$

であって, 指数 d_f は対象となるものの空間次元 d に他ならない.

同じことを少し違うやり方で表現しよう. あるパターンを長さ b の単位 (たとえば線分や, この長さの一边を持つ正方形, 立方体など) で覆うのに N_b 個必要だとしよう. この単位となるものの大きさ (さしわたし) を α 倍にすると, 必要な単位の数 N/α^{d_f} 個必要になったとしよう. ふつうの平面図形を覆うとすれば, 正方形のパッチの一边を 3 倍にすれば $1/3^2 = 1/9$ 倍の個数で間に合うから

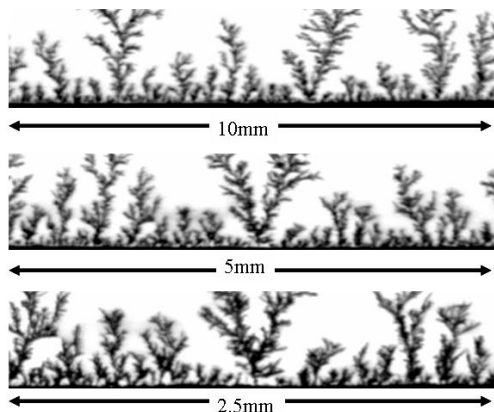


図 11: 2 次元の銀樹の森の下草の植生.

$d_f = 2$. つまり一般には

$$b \rightarrow b' = \alpha b \quad \Rightarrow \quad N_b \rightarrow N_{b'} = \frac{N_b}{\alpha^{d_f}}. \quad (9)$$

この d_f は、通常の幾何学的図形では、図形の埋め込まれた空間次元 d で決まっている. しかし図 9 に示したような図形では、埋め込まれている空間は紙の表面の 2 次元だが、図形を覆うのに必要な単位図形の数という意味の次元 d_f は 2 より小さい. 図 9(a) 図形 (Viscek の雪片) では長さの単位を $1/3$ にすると覆うのに必要な数は 5 倍になる (3 倍にすれば $1/5$). (9) 式より α^{d_f} は

$$\alpha^{d_f} = \left(\frac{b'}{b} \right)^{d_f} = \frac{N_b}{N_{b'}} \quad (10)$$

であり、フラクタル次元 d_f は

$$d_f = -\frac{\ln(N_{b'}/N_b)}{\ln(b'/b)} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = \frac{1.6094}{1.0986} = 1.465 \quad (11)$$

となる.

[自習用課題] Sierpinski ガスケットと Koch 曲線のフラクタル次元はいくつか?

[発表用課題] フラクタル的な対象を探して、そのパターンを解析し、フラクタル次元を求めてみよう. (具体的なやり方は読書案内の文献参照.)

自然界によくみられるフラクタル的凝集パターンをモデル化した成長モデルに拡散律速凝集モデル (diffusion-limited aggregation: **DLA**) がある⁹. DLA は計算機上の成長モデルで、動かない固体粒子を置いておき、その周りに一つの

⁹C.-H. Lam: <http://apricot.ap.polyu.edu.hk/~lam/dla/dla.html> の JAVA アプレットで体験できる.

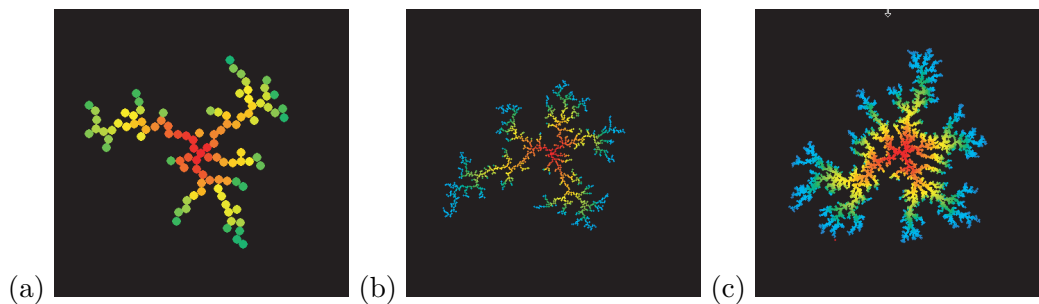


図 12: DLA の成長. 粒子数がそれぞれ, (a) 約 100, (b) 約 1000, (c) 約 10000 のときのパターン.

粒子をランダムウォークさせる. この拡散粒子は固体に接触すると固化する. 固化したら次の拡散粒子を, 固体の周りにランダムに一つだけ放ち, その固化を待つ. この操作を繰り返すと, 図 12 のような枝分かれた固体 (凝集体) ができ上がる. これは図 10 のような溶液からの成長を, 点状の種の場合に理想化したもので, 溶液が低濃度の極限に相当する. DLA クラスターのフラクタル次元は $d = 2$ では $d_f = 1.71$ であることが知られている. この理想化された DLA のフラクタル次元が, 図 10 の成長速度の溶液濃度依存性や成長パターンを支配することが分かっている. 結果だけを書きおくと, 凝集体の先端の成長速度 V は硝酸銀の濃度 c を変えると

$$V \propto c^{1/(d-d_f)} = c^{3.5} \quad (12)$$

のように急激に変化する. 溶液濃度と成長速度に関係があることは当然だが, その関係がある種の幾何学的次元で決まると言うのは不思議なことだ.

6 読書案内

宇宙に関連した大きさの話は

須藤靖「ものの大きさ—自然の階層・宇宙の階層—」東京大学出版会, 2006 年

池内了「宇宙と自然界の成立ちを探る—物質の構造と基本定数—」

サイエンス社, 1995 年

に詳しく書かれている. 自然の階層性の一番深く豊かな部分は, 原子が結合してできる密度が $1\text{g}/\text{cm}^3$ 程度の世界だ. 自然科学のほとんどの努力は, この領域を知るために注がれている (私たちが生きているのはこの世界だから当然だが). これからいろいろなことを学ぶことになるだろう.

ファインマンは有名な教科書の中で「もしもいま何か大異変が起こって, 科学的知識が全部なくなってしまう, たった一つの文章だけしか次の時代の生物

に伝えられないということになったとしたら、最小の語数で最大の情報を与えるのはどんなことだろうか。私の考えでは、それは原子仮説だろうと思う。」と書いている。その本は

ファインマン 「ファインマン物理学 I 力学」

坪井忠二 (訳), 岩波書店, 1967 年

ただし, 原子論的な考えをおもに展開しているのは, 訳書では続きの

ファインマン 「ファインマン物理学 II 光, 熱, 波動」

富山小太郎 (訳), 岩波書店, 1968 年

である。

学術会議がイニシアティブをとった「科学技術の智」プロジェクトが, 「成人段階を念頭において、全ての人々に身に付けてほしい科学・数学・技術に関係した知識・技能・物の見方」を実際に作成することを目的として検討を行い, 2008 年 6 月に報告書をまとめた。七つの専門部 (数理科学, 生命科学, 物質科学, 情報学, 宇宙・地球・環境科学, 人間科学・社会科学, 技術) が報告書を出している。この話に一番関係するのは物質の話

「科学技術の智」プロジェクト 「物質科学専門部会報告書」

だ。私たちが (とくに理系の人間なら) 常識として知っておくべきことが要領よくまとめられているので読んでみるとよい。次のサイトで手に入る。

<http://www.science-for-all.jp/minutes/index5.html>

フラクタルについての解説としては

「フラクタルの物理 (I) 基礎編」 松下貢, 裳華房, 2002 年

が手ごろである。