

絶対空間と絶対時間

—相対性理論の世界—

名古屋大学大学院理学研究科物理学教室

上羽牧夫¹

要旨

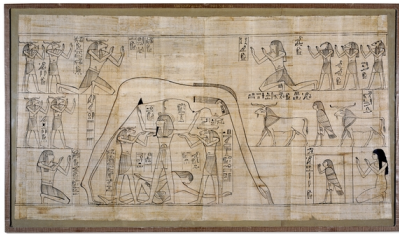
人類の持つ空間に対する考え方は時代とともに大きく変わってきた。地球を中心とする閉じた世界から無限に広がる一様な世界への転回を遂げたあとも、変貌を続けている。ガリレイの相対性原理は絶対空間の存在を否定しているが、アインシュタインの相対性理論は絶対空間と絶対時間を否定したはずだが、観測に基づく現代の宇宙像は絶対空間と絶対時間を復活させたかにも見える。

1 宇宙像の変遷

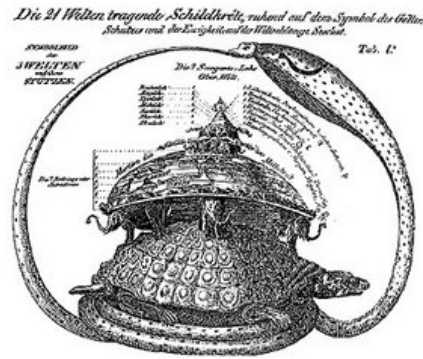
古代インドの宇宙観によれば、この世界は4頭の巨象が支えていた。その象は巨大な亀の甲羅に乗り、その亀は大蛇の上にいる。この時代の宇宙像には世界中どこのもでも、たいてい上と下の区別がある。たとえばウィキペディアによると

- 日本書紀：太古、天と地とは分かれておらず、互いに混ざり合って混沌とした状況にあった。しかし、その混沌としたものの中から、清浄なものは上昇して天となり、重く濁ったものは大地となった。そして、その中から、神が生まれるのである。
- 旧約聖書：はじめに(ヘブライ語「ベレシース、beresit」)、エロヒム(日本では神と訳されている)により天と地が作られた。地はかたちなくうつろで闇が水の面にありルーアハ(日本では聖霊と訳されている)が水面をおおっていた。エロヒムが「光(ヘブライ語「オール」雷の意味もある)あれ」といい、光が作られた。光と闇が別けられた。これによって光が昼、闇が夜と名づけられた。夕があり朝があり第一日となった。

¹Makio Uwaha. E-mail:uwaha@nagoya-u.jp; <http://slab.phys.nagoya-u.ac.jp/uwaha/>



(a)



(b)

図 1: 古代の宇宙像 . (a) エジプト (大英博物館) , (b) インド

- ヘシオドス「テオゴニア (神々の誕生)」: 最初に カオス (混沌) が生じた。その次にガイア (大地) とタルタロス (幽冥)、そして エロス (愛) がともに誕生した。カオスからは エレボス (闇) と ニュクス (夜) が生まれ、両神が交わってニュクスは ヘメラ (昼) と アイテル (光) を産んだ。ガイアは独力でウラノス (天空) とポントス (海) を生んだ。

最初は混沌とした状態だが、そこから天と地が分かれるというのが最も標準的なパターンのようなのだ。

上と下の感覚は、生物が重力のもとで進化してきたことに起源を持ち、人間の脳にもあらかじめプログラムされた生得のものである。部屋の床が水平でなかったりすると、たいてい人はパニックに陥る。(この経験のない人は伏見にある電気の科学館に行ってみよう。入場無料で楽しめる²。) さてこのような上下のある世界観は、地球が球体を成すことが知られてから、だんだんと変化を遂げる。脳にインプットされた重力の呪縛からも、徐々に自由になっていく。宇宙観の変遷は興味深いテーマだが、ここでは詳しく触れる余裕はない。

空間とならぶ、もうひとつの世界観の基礎になる問題に「時間」がある。先のいろいろな神話、信仰はすべて宇宙創造の物語である。宇宙には初めがあるのか、神様がほんとうに一週間で世界を作ってしまったのか、世界創造の仕事始める前に神様は何をしていたのか、など興味は尽きない。ギリシア流の「最初にカオスが生じた」という方が、これよりは現代の宇宙観に近い。いずれにしろ古代の宇宙観では空間も時間も有限であった。個人の知ることのできる世界が時間的にも空間的にも有限である以上、宇宙が時間的にも空間的にも有限だと考えられたことは自然である。空間については天文学の進歩とともに世界が広がっていったが、時間とは何かという問題を、日常的な感覚を越えて科学

²最近行ってないので、まだ在るか保証の限りではない。

的に考えられるようになったのは、20世紀になって相対性理論と量子力学ができてからのことである。

[発表用課題] 章末に掲げた参考書を読んで、宇宙観の変遷をたどってみよう。

2 古典物理学の世界像

長い歴史の中でだんだんと築き上げられ、20世紀の始まる段階までに確立してきたのは次のような自然観だ。

空間：宇宙空間には上下を区別するような特別の方向は本来存在しない。上下の区別ができるのはそこに何らかの物(たとえば地球)があつて、それに対する位置関係に区別があるからである。このことを宇宙の等方性という。また宇宙には特別な場所はない。たしかにいま自分のいる場所は特別な場所だが、それは自分にとって特別なだけで、宇宙のほかの場所に生息する生物にとってはその生物の棲む場所が特別な場所になる。民主主義の原理を認めると、特別の場所はないとするのがもっともらしい。このことは宇宙の一様性という。

物理学者は民主主義が好きである。それは無条件に平等を認める考え方とは違い、「区別する理由が何もないならば、同じにする他はない」という考え方だ。このような「AとBを区別する理由がなければ、AとBは同じように成立する」という考え方をもう少し格好よく「対称性によってAとBは等しい」と表現する。つまり、対称性³によって空間のあらゆる方向と位置は同等である。その結果、空間は無限に広いと結論される。何故なら、端があることは一様性の考えに反することである。また、もし宇宙の端があるなら、その先に何かあるのか考えなくてはならない。その何かも宇宙の中に入れてしまえば宇宙は無限に広いことしかありえない⁴。

時間：時間についても同様の考え方ができる。特別な理由がないなら、「時間は太古の昔も現在も同じように流れていく」と考えるのが自然だと思える。つまり時間の流れには一様性があると思われる。このように、19世紀末には人々の考え方は、「端や初めがあるとすると、端の先に何かあるのか、初めの前に何かあるのか分からないから、時間も空間も無限だと思うことにしよう」という風に変わってきたようだ。このような世界観の成立の背景には、数学の発達と結びついて、ニュートン力学が圧倒的に強力であり、その「器」として一番シン

³「対称性」とは対象にある操作を施しても対象が元と変わらなければ、その操作に対して対称であると言う。

⁴みんながもし現代の宇宙像についての知識を持っていたら、こうは結論しないだろう、われわれの住む宇宙空間が「曲がって」いて、どの方向に方向に真っすぐに進んでも元の場所に戻ってしまう「閉じた宇宙」かも知れないと考えるに違いない。

ブルな時間，空間の見方が普及したのだろう．

[瞑想用課題] 「時間が一樣に流れる」とは何を意味するのか考えてみよう．

しかし，一樣性や等方性は「特別な理由がないならば」という条件付きで出てくる結論だ．空間や時間を，その中に世界が入る空っぽな器のように考えるとこの結論はもっともらしいが，現実の世界はそうではない．そのなかに「物」があり，それが運動変化している．運動や変化に対するこの時代の主流となる見方は—そしてそれは現在でもある意味で主流となる見方ではあるが—決定論的因果性だ．ニュートン力学もマクスウェルの電磁気学も基本法則は微分方程式の形で書かれている．ニュートン方程式は $f = ma$ ，あるいは

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} \quad (1)$$

というシンプルな形で，これを解けば，ある時刻の位置と速度からそれ以後のすべての運動が決まってしまう．マクスウェル方程式はこれより複雑で解くのも大変だが，初めの様子(初期条件と呼ばれる)が分かれば，その後の様子が一義的に決まってしまうという点は同じだ．

無限に広がる一樣等方な空間と始めも終わりもない一樣な時間，そしてその中にある「物」は決定論的因果律に従って運動する．これが古典物理学の世界観である．

解説：微分方程式

(1) 式のようなものを微分方程式と呼ぶ．ある時刻の位置を $x(t)$ とすると，その変化率が速度 $v(t) = dx/dt$ ，速度の変化率が加速度 $a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2$ だ．

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{1}{m} f(t) \quad (2)$$

の形の関係が分かれば，ある時刻 t の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ の情報から，それからわずかにあと $t + \Delta t$ の情報が得られる：

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{dv(t)}{dt} \Delta t = v(t) + a(t) \Delta t = v(t) + \frac{f(t)}{m} \Delta t, \quad (3)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \Delta t = x(t) + v(t) \Delta t. \quad (4)$$

次は，こうして得られた $t + \Delta t$ での位置と速度の情報を使って，さらに Δt だけあとの位置と速度がわかる．これを続けていけば，ずっとあとまでの位置と時刻が分かってしまう！こんなことを言っても昔は実現不可能な，ただのお話だった．計算機の能力の驚異的な向上で「原理的に決まってしまう」という話が，かなり「実際に分かる」に変わりつつある．

「解析力学」を学ぶと、「力 → 加速度 → 速度 → 位置変化」といった素直な見方とは違って、抽象化された座標や運動量が入り乱れて現れる。このような視野の拡大の結果、空間の一様性や等方性、時間の一様性といった性質を認めると、高校で学んだ大事な物理法則がいろいろと導かれる。空間の一様性が運動量保存の法則、空間の等方性が角運動量保存に法則、時間の一様性がエネルギー保存の法則に関係しているのである。

これに対していろいろな疑問がわいてくる。たとえば空間の反転対称性の問題があるニュートンやマクスウェルの方程式は、ある運動が起こるとすると、それを鏡に映した運動も、映画に撮って逆回しにした運動も同じように起こってもよい⁵。しかし本当に世界がそのようになっているかには疑問がある。誰でもが、過去へ戻っていくこと未来へ進んでいくことは同じでないと思っている。過去と未来の違いは明らかで、「歴史」とか「進化」と言う事実もあるから、基本法則が時間を逆向きにした運動を許すことと折り合いをつけなくてはならない、また決定論的因果性は、物理法則が世界の運動を支配していると信じるなら、私たちが持っていると思っている「自由意志」と矛盾しているように思える。いずれにしろ空間や時間の一様性や等方性、決定論因果性など古典物理学の中核となる世界観は、ある意味で信仰に過ぎず、正しいかどうかは慎重な検討が必要なことがわかる。

[自習用課題 (余裕のある人へ)] 空間や時間の一様性、等方性からどのようにして保存法則が導かれるか調べてみよう。

時空の反転対称性や決定論的因果性の問題はいずれ別に検討することにして、今回は絶対空間や絶対時間の問題を考えることにしよう。

3 相対性原理

空間や時間に関係する大切な原理として相対性原理というものがある。ここでいう「相対性原理」は有名なアインシュタイン (Albert Einstein: 1879-1955) が発見した比較的新しい(といってももう100年前のことだが) ものではなくて、もう少し由緒あるガリレイの相対性原理と呼ばれているものである。空間の一様性は特別な場所を否定するものだが、相対性原理は絶対静止空間の存在を否定し、物理現象を記述しようとする観測者にさらなる民主主義を保障するものである。少し詳しく説明しよう。

私たちは物の見え方が相対的であることをよく知っている。自分の近くにあ

⁵電磁気学には「右手の法則」という言葉があったから、鏡に映すと全く同じ運動にするためには磁場の向きを逆におかなくてはならない。

るものは大きく見え、遠くのもの小さく見える。この場合、同じところに持ってくれば大小ははっきりする。つまり物の大きさには絶対的な尺度があり、見掛けの大きさは自分からの距離とともに減少する。

また同じ場所かどうかということが相対的なものだということも知っている。新幹線の同じ座席に座っていても、地球の上では1時間に200km以上も離れた場所に移ってしまう。駅のホームに降りてベンチに腰掛けていても、地球が自転しているから半日経てば初めの位置から数千キロ離れた位置に来ているだろう。いや実は地球は太陽の周りを回っているから1秒間に30kmの速さで位置が変化しているはずだ。こちらの方が自転速度よりはるかに速い。しかしこの速度は一体何に対する速度だろうか？このように位置や速度は他のものに対して相対的に決まるものである。ガリレイの相対性原理は、この位置と速度の相対性を強く認めるもので、力学現象の特権的な観測者はいないと主張する。

「ある物体に他から何の力も働いていないとすると、この物体は止まっているか等速直線運動をする」というのが高校の教科書に書いてあるニュートンの運動の第1法則である。ものさしと時計を持った観測者のことを物理学では座標系と呼び、第1法則の成り立つ座標系を慣性系と呼んでいる。われわれの日常的な感覚にしたがうと、時間の進み方はすべての座標系で共通で、物差しも同じものが使える。相対性原理の言うところは、このような慣性系から他の慣性系(観測者)を見れば、お互いにみなそれぞれとある一定の速度で直線運動している関係にあり、誰かが絶対的に静止していると主張する権利はない、ということである。宇宙が無限で等方的であることを認め、空間を物質を入れる空っぽの容器だと思えば、ガリレイの相対性原理は受け入れやすい考えだろう。

[瞑想用課題] 運動の第1法則は経験法則である。しかし「ある物体に他から何の力も働いていないとすると」と言われても、世の中にそのような物体はないだろう。物理学ではこのような表現をよく使うが、誰も経験できないようなことがどうして経験法則なのか考えてみよう。

ガリレイの相対性原理に従えば、速度はベクトルとして普通の足し算ができる。つまり座標系Bで速度 v' で動いている物体を、座標系Bが速度 V で動いて見える別な座標系Aから見たら $v' + V$ の速度で動いて見えるということである。お互いに等速直線運動する座標系を乗り変わることをガリレイ変換と呼ぶ。座標系Aでのある物体の座標を r と時間を t とし、座標系Bでのそれらを r' と t' として、式で書けば両者は

$$r = r' + Vt \quad (5)$$

$$t = t' \quad (6)$$

の関係にある．時間は両方に共通である．初めの式を t で微分すれば速度の関係 $v = v' + V$ がでてくる．

ガリレイ変換を使って物体の衝突を考えてみると，対称性だけを使っていることがわかる．

1. 二つの同じ物体の正面衝突を考える．同じ速さで左右からやってきて跳ね返れば，衝突前の速さは v^B と $-v^B$ ，衝突後の速度は「対称性より」 v^A と $-v^A$ である (B と A は before と after)．球の正面衝突なら，衝突前後の速度は同じ方向を向いているが (v^B と v^A が平行で $v^A = -v^B$)，速さがどうなるかは反発の大きさ次第である．二つの物体に瞬間接着剤をつけておけば，くっついて静止するので $v^A = 0$ ．だが，少しでも衝突する点为中心からずれば，跳ね返る v^A の方向はいろいろ変わり得る．
2. 速度が異なる場合はどうなるだろう．衝突前の速度を v_1^B と v_2^B としよう．こんどは対称性の考えは使えないと思うかもしれないが，そんなことはない． $V = (v_1^B + v_2^B)/2$ の速度で走りながらこの衝突を観測するのである．この人から見ると衝突前の速度は， $\bar{v}_1^B = v_1^B - V = (v_1^B - v_2^B)/2$ と $\bar{v}_2^B = v_2^B - V = (v_2^B - v_1^B)/2$ となるから，同じ速さでの正面衝突に見える⁶．したがって衝突後の速度は「対称性より」逆向きのある速度 \bar{v}^A と $-\bar{v}^A$ である．もとの座標系に戻ってみれば， $v_1 = \bar{v}^A + V = \bar{v}^A + (v_1 + v_2)/2$ と $v_2 = -\bar{v}^A + V = -\bar{v}^A + (v_1 + v_2)/2$ となって，衝突後の両者の関係が分かるのだ．

このようにガリレイ変換をうまく使うと簡単な議論の積み重ねで運動量保存の法則も推論できる⁷．(ただし，何事もそうだが，成果を得るには根気が必要だ．)

[発表用課題] 上のような議論をやって衝突のさいの運動量保存の法則

$$m_1 v_1^B + m_2 v_2^B = m_1 v_1^A + m_2 v_2^A \quad (7)$$

の特別な場合，たとえば $m_2 = 2m_1$ で衝突後に二つの物体が合体してしまったときの衝突後の速度を求めてみよう．

4 電磁場の発見と相対性原理の危機

古典力学は，ニュートン (Isac Newton: 1643-1727) がその著書「自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)」のはじめに公理として掲げた運動の 3 法則がそ

⁶ここでは運動座標系での速度をバーをつけて表す

⁷衝突現象を，観測者を替えて考察することは，振り時計の発明者でもあるホイヘンス (Christiaan Huygens: 1629-1695) によって最初になされた．

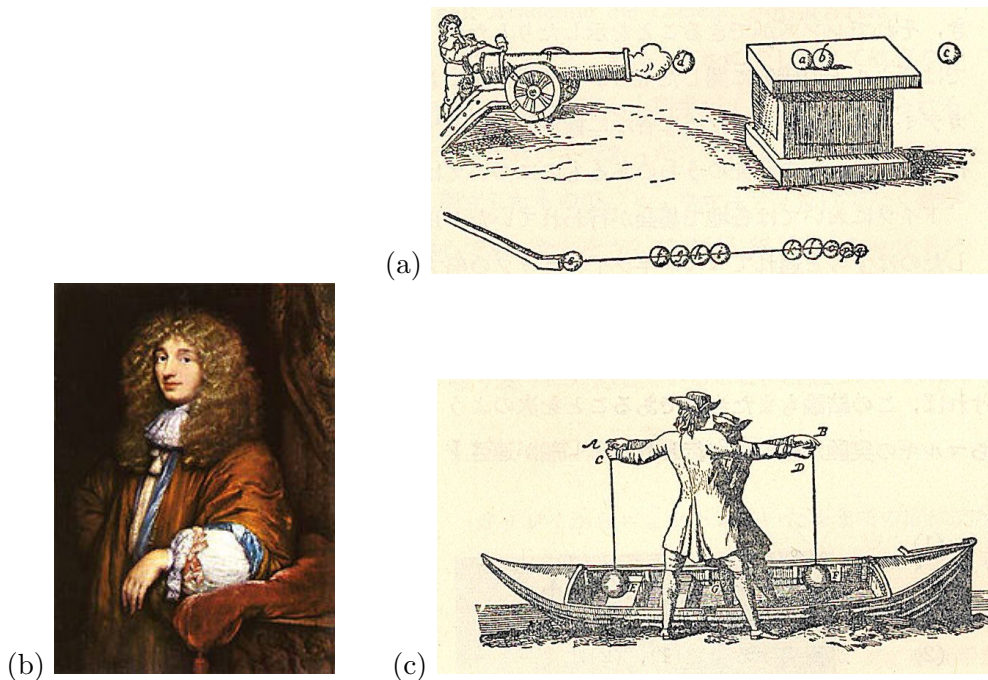


図 2: ホイヘンスは球の衝突の実験を、観測系を変えて考察した。(a) マルキの衝突の実験, (b) ホイヘンス, (c) ホイヘンスの衝突の実験.

の中心である.

1. 慣性の法則: ある物体に他から何の力も働いていないとすると, この物体は止まっているか等速直線運動をする.
2. 運動方程式: 物体の運動の変化 (速度の変化率, つまり加速度) は, 力に比例し質量に反比例する:

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} \quad (8)$$

3. 作用反作用の法則: 二つの物体の及ぼしあう力は大きさが相等しく逆向きである. つまり物体 A が物体 B に力 $f_{A \rightarrow B}$ を及ぼすとき, 物体 A は物体 B から

$$\mathbf{f}_{B \rightarrow A} = -\mathbf{f}_{A \rightarrow B} \quad (9)$$

の力を受ける.

このうち最初の二つは位置の変化についてのものである. 一番目と二番目は (8) 式で $f = 0$ とすると v は定数になるから, 同じことのように思えるが, 第 1 法則はむしろ「このような慣性系と呼べる座標系があるので, そこで運動を調べ



図 3: (a) デカルト, (b) ラプラス, (c) ファラデー .

ましよう」というという主張と理解したほうがよい。この3法則を活用し、あらゆる物体のあいだに働く万有引力などの力を仮定することで、天体の運動をはじめあらゆる力学現象が説明できそうに思えた。ある時刻の天体に位置と速度が決まれば、お互いの位置関係で決まる力 f と (8) 式を使って、そのあとに時刻の速度と位置が決まってしまう。ラプラス (Pierre-Simon Laplace: 1749-1827) はこの事態を「もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ、かつもしもそれらのデータを解析できるだけの能力の知性が存在するとすれば、この知性にとっては、不確実なことは何もなくなり、その目には未来も (過去同様に) 全て見えているであろう。」(「確率の解析的理論」1812年) と記述した。この「知性」はラプラスの悪魔とも呼ばれるようになる。つまり未来は原理的に予言可能である。

ニュートン力学の成功で、前節でまとめたような時間と空間についての考えが主流になってきたのである。力学的なことに關するかぎり、実験的にはこの見方と矛盾するようなことは何もなかった。力学によって星の運行を計算することを可能にし、天体間に働いていると考えられた万有引力は、何もない空間を飛び越えて遠く離れた物体のあいだに働く作用—遠隔作用—であると考えられていた。だからこそ、ある瞬間のお互いの位置だけによってその間に働く力が決まってしまうのである。

デカルトの「世界論」などでは⁸、宇宙は物質が満ちていて、それが作用を遠方まで伝えるという考え方があった。このような考え方を近接作用と呼ぶ。ニュートン力学の圧倒的な成功で、こういう考えはあまり問題にされなくなっていたが、19世紀になると電気や磁気の研究が進み「場」という考えが復活し

⁸デカルト (René Descartes: 1596-1650) は「我思う。故に我あり。(Je pense, donc je suis.)」の言葉で有名な哲学者だが、優れた自然科学者、数学者でもあった。機械論的世界観、渦動説による宇宙論、デカルト座標の発明など、デカルトの科学者としての業績も多い。「世界論」はガリレイ異端尋問の年 1633年に執筆されたが、地動説を認める内容であったため、公刊されたのはデカルトの死後 1864年。

てきた．電氣的な作用や磁氣的な作用を伝える電場や磁場の考えがファラデー (Michael Faraday: 1791-1867) らによって導入され遠隔作用の考えに疑問が生じたのである．マクスウェルは電場と磁場の関係を数学的に表現し，電磁場の振動が波として秒速 30 万キロで空間を伝わることを理論的に導いた．そしてこの速さが光りの速さと同じであったことから，電磁波と光は同じものだと言主張した．光と同じ速さで伝わる電磁場の振動，電磁波があるというのだ．火花放電によって急激に変化する強い電場を作ると，それが遠くまで伝わるのがヘルツによって発見され，予言は検証された⁹．しかし作用が有限の速さで空間を伝わるとすると，重大な問題が生じることになる．

電磁気学は不思議なやり方で相対性原理を満たしている．二人の観測者がお互いに等速直線運動をしていて，一人 (A) は磁石を，もう一人 (B) は電圧計をつけた導線¹⁰を持っているとしよう．A からみると磁石の作る磁場は時間変化しないで，その中を B の持つ導線が運動している．導線の中の電子は磁場に対して運動しているので，ローレンツ力と呼ばれる磁場と運動方向の両方に垂直な方向への力を受ける．この力を式で表すと，電子の電荷を $-e$ ，速度を v ，磁束密度を B とすると， $f = -ev \times B$ となる．電圧計にはこれが起電力として観測される．他方，B から見ると導線は止まっているが，磁石が動いているので磁場が変化し電磁誘導によって電場が現れる．この電場が電子に働く起電力となる．現象の説明は違うが，結果的に生じる起電力はどちらから見ても同じであり，A も B も同等の権利を持って，自分が静止して相手が運動していると主張できるのだ．

しかし電磁波が「何か」を伝わると考えると，A も B も同等の権利を持つという主張が崩れてしまいそうだ．音は空気の振動として空気中を伝わり，音速は約 340m/s である．したがって音の伝わってくる方向に進めば，音の観測者に対する相対速度は速くなり，音と同じ方向に進めば遅くなる．近づいてくる列車の汽笛の音は高く聞こえ，遠ざかっていく汽笛の音は低く聞こえる．(列車の汽笛なんて聞いたことがないかもしれませんが．救急車のサイレンでも何でもよろしい．) 音の速さを測れば (たとえば周波数のわかっている音源から聞こえる音の高さ (周波数) を測定して)，空気に対する自分の速度がわかる．同じようにして，光の速さを測れば，光を伝えている「何か¹¹」に対する速度がわかるはずだ．つまり光の速度が秒速 30 万キロ (正確には 299742958m/s) になる座標系が静止系ということになる．今までガリレイの相対性原理によって対等

⁹ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz: 1857-1894) の実験は 1889 年のことである．マイケルソンの最初の実験は 1881 年なので，それよりもあとのことだ!

¹⁰電気を通す線と言う意味．銅線を想像してもらえば良い．

¹¹ホイヘンスは光を固体中を伝わる音波のようなものと考え，宇宙に満ちたこの物質を「エーテル」(aether または ether) と呼んだ． $(C_2H_5)_2O$ と表される化学物質ではない．

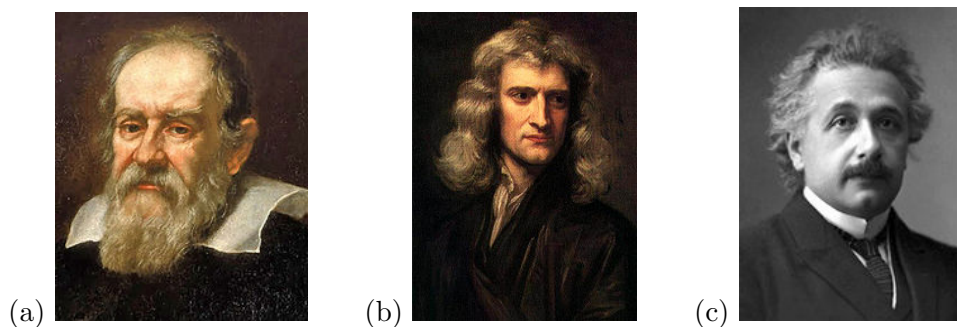


図 4: (a) ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei: 1564-1642), (b) アイザック・ニュートン, (c) アルベルト・アインシュタイン

とっていた互いに等速直線運動をする座標系の中から, ただひとつの絶対静止系が選ばれることになったのだ.

5 相対性原理の勝利

絶対静止系に対する速度を決める実験をやってみたのが, 当時はまだ物理学の世界では新興国であったアメリカの物理学者マイケルソン (Albert Abraham Michelson: 1852-1931) である. 彼は光の干渉効果を利用して地球の公転方向とそれに垂直な方向での光の速度差を検出しようとしたのだ. 光の速さは秒速 30 万キロ, 地球の公転は秒速 30 キロで 1 万倍も違うから, この違いを検出するのはなかなか大変な仕事であった. ところが精度を上げて実験を繰り返してみても¹²まったくこの差が現れなかったのだ. 絶対静止系に対して地球が運動していることを検証しようとする試みはことごとく失敗した. 光は, 追いかけても, 向かい合う方向で速さを測っても同じ結果が得られるのである. これを光速不変の原理と呼ぶ. マクスウェルの導いた電磁気学の基礎方程式からは一定の光速が結論され, 光速不変の原理とつじつまが合う. しかし, そうなるとマクスウェル方程式に現れる時間 t とか座標 r とか言うものはいったい誰がどのようにして測るものなのだろう. 二人の観測者の間の (6) 式で表されるガリレイ変換とどう折り合いをつければよいのだろうか? この事実をどうやって説明するか, 光速不変の原理と相対性原理の矛盾に物理学者は深刻に悩むことになった.

[発表用課題] マイケルソンの実験, (マイケルソンとモーリーの実験) がどのようなものか調べてみよう.

¹²マイケルソンは自分の発明した干渉計を使って 1881 年に実験を行った. さらに 1887 年にモーリーとともに精度を上げて決定打となる実験を行った.



図 5: (a) マイケルソン, (b) ローレンツ, (c) ポアンカレ

少年時代のアインシュタインは、光を追いかけてながら観測したらどうなるかを考えていた。サイン曲線のような波が横を通り過ぎていくことを想像しよう。もし同じ方向に走りながらこの波を見たら、振動は遅くなって見えるはずだ。電磁波は電場の変化が磁場を誘導し、その磁場の変化が今度は電場を誘導する、ということくり返して進んでいく。これが一定の速さ光速で伝わるというのがマクスウェルが予言したことだ。この変化がゆっくりになるなどということがあるのだろうか。どんどん速く走って見たら、振動は止まってしまうであろう。これでは電磁波にならないではないか？少年アインシュタインはこんなことは起こるはずがないと考えた。

アインシュタイン以前にも時間の進み方が遅くなるとか、物の長さが縮むという関係式を導いた人はいた。ガリレイ変換に変わる x と t の関係はローレンツ¹³が最初に導き、ポアンカレ (Jules-Henri Poincaré: 1854-1912) は速度の合成則を与えた。しかしそれは計測値が変わるだけであって、時間そのもの空間そのものの性質とは見なされていなかった。アインシュタインは場が変化して空間を伝わっていくという事実を何よりも重く受け止め、むしろ時間とか空間とか言うものはそれを表す形式に過ぎないのではないかと考えた。光速不変の原理とあらゆる慣性系は優劣がないという相対性原理を受け入れてしまえば、それまでの空間や時間に対する考え方を覆すようなことが次々と論理的に導かれる。彼はこれを素直に受け入れ、時間と空間に関する見方に革命を起こしたのである。この理論は特殊相対性理論と呼ばれている。特殊相対性理論では慣性系はみな平等という立場が貫かれる。このあとにアインシュタインは一般相対性理論と呼ばれるものを提唱し、そこでは慣性系でないものまで含めて一般的な観測者を同じように扱った。

¹³Hendrik Antoon Lorentz: 1853-1928. オランダの物理学者、ガリレイ変換に代わるローレンツ変換が有名だがゼーマン効果の発見でノーベル賞を受賞している。彼はオランダのゾイデル海の入口に大堤防を作る計画の土木事業を検討する委員会の長として8年間の研究の後に必要な堤防の高さを決定し、国家事業の成功に大きく貢献した。

[発表用課題] 相対性理論の帰結として、次のようなことを聞かされる。i) 高速で運動するものは長さが縮む。このことを最初に導いた人の名をとってローレンツ短縮と呼ばれる。ii) 高速で運動すると時間の進み方がゆっくりになる。iii) 高速で運動すると質量が増加する。参考文献を学んでこれらがどのように導かれるか調べてみよう。一番やさしいレベルでは中学生から、各自の知識のレベルの応じて適当な文献を選べ。

二人の観測者(二つの座標系)A と B を考え、B は A に対し速度 V で x 方向に運動しているとする。A と B は物差しを持っている。二つの物差しの目盛りが一致していることは、この物差しを z 方向に向けてすれ違う瞬間に重ねてみれば確認できる。物差しの長さを L としよう。 z 方向に立てた物差しの上端に鏡を、下端に光源をつけて下から出た光が鏡に反射して戻ってくる間の時間を時計で測る。A は当然次のように言う。

A: 「私の測定では、 L の距離を c の速さで往復していますから、この時間は $t_A = L/c$ です。」

これを聞いた B は、往復にかかった時間 t_B について次のように言う。

B: 「光源は光を出してから戻ってくるまでの間に Vt_B だけ x 方向に移動しています。光の進んだ道のりは $2\sqrt{L^2 + (Vt_B/2)^2}$ だから、かかった時間はこれを光速で割った

$$t_B = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{Vt_B}{2}\right)^2}}{c} \quad (10)$$

です。この式を解いて、時間 t_B を計算すると

$$t_B = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (11)$$

となります。往復の時間が $2L/c$ がかかったとおっしゃるなら、あなたの時計は遅れてますね。」

ところが同じ実験を B の方の物差しを使ってやってみた。今度は B は

B: 「 $t_B = 2L/c$ でした。」

と言うのだが、それを見ていた A は先ほどの B と同じように

A: 「とんでもない。物差しは移動しているから光の進んだ距離は $2L$ よりも長く、かかった時間は $t_A = 2L/c\sqrt{1 - (V/c)^2}$ となります。」

と主張する。お互いに相手の時計が遅れていると主張して譲らない。

現代物理学は、よく言われるように時間や空間の概念を一新した。そのために必要だったのは、今まで見てきたように、物体に働く力と運動の関係を導く力学、それに電場や磁場が変化する法則を示す電磁気学、このふたつであった。

この二つを矛盾なく統合するために、相対性理論が生まれたのである。物理学をもう少し学べばわかるように、電磁氣的な力は、重力を別にして、われわれの周りの物質の性質を決めている最も基本的な相互作用である。つまり物質の運動(位置変化よりももっと広い意味での物質の変化一般)の法則を矛盾なく記述するには、相対論的な時間空間が必要になったのだ。このことは深い意味を持っている。空間や時間は空っぽの入れ物ではなく、物質の運動が先にあってその変化の枠組みが時間と空間なのである。このことを理解しようと思うと、今まで「時計」とか「物差し」と呼んできたものが一体何なのかを考えてみる必要がある。時計や物差しを作っているのは「物」だから、量子力学のことを学んで、物についての知識を身に付けてからもう一度考えることにしよう。

現代物理学が前世紀の初頭になし遂げた時空概念の変革は哲学、もっと広く言えば人類の世界観に大きな影響を与えた。特殊相対性理論は、その中身が比較的わかりやすいために、世の中に驚きを与えた。また「時間が遅れる」、「物体が縮む」、「 $E = mc^2$ 」などの言葉は、理解の程度は別として、かなり普及したと言ってよいだろう。「物理学の不思議」のなかでは素人受けがよいので、常に人気第1位である。おかげで「相対性理論は間違っている」という大発見をする人もあと断たない。物理学の不思議には、もっと玄人向きのもものいろいろある。そのいくつかを紹介していくつもりだ。そして最大の不思議と驚きは量子力学の世界にあると私は思う。それがどんなものなのかは、このセミナーの後半で扱う予定なので、あとの楽しみに取っておこう。

6 読書案内

宇宙観の歴史を語った本はいろいろある、と思ったが手元にすぐには適当な本が見つからなかった。

須藤靖「ものの大きさ—自然の階層・宇宙の階層—」東京大学出版会、2006年などにも古代宇宙観の紹介があるが、この本を今読むのは難しそうだし、近代化の歴史(プトレマイオスからコペルニクスへの転換)などは書かれていない。この部分を扱ったものでは

朝永振一郎「物理学とはなんだろうか(上,下)」岩波新書 1979年
が名著である。最近の本では

米沢富美子「人物で語る物理学入門(上,下)」岩波新書、2005年
に主要人物が何人も登場する。

私がキーワード、キーパーソンと思うものをあげておく。「古代の宇宙観、ア

リストテレス，プトレマイオス，コペルニクス，ブルーノ，ガリレイ，ニュートン，アインシュタイン，ハッブル，ガモフ....」

空間や時間の対称性から保存法則を導くことは力学の教科書の最後の方に書いてあることが多い．この部分だけを知りたいという人のためには，一番最初にこのことが書いてある

ランダウ，リフシッツ「理論物理学教程：力学」 水戸巖訳，東京図書，1967年
が名著である．ただし抽象的なので，力学の中身をよく知らない人には難しいだろう．理論志向の人のための本である．

相対性理論の中学生にも読める啓蒙書として

ランダウ，ルーメル「相対性理論とは何か」 小島英夫訳，大竹出版，1988年
がお勧め．ランダウ，ルーメル「相対性理論入門」鳥居一雄訳，東京図書，1963年，も同じ本である．著者のランダウは，ファインマンとならんで物理のあらゆる分野をマスターしえた最後の天才である．液体ヘリウムの超流動の理論的研究でノーベル賞を受賞した．ランダウ-リフシッツ理論物理学教程という教科書シリーズは，そのいずれもがその分野の代表的な名著に数えられるというすばらしいものである．相対性理論については第2巻「場の古典論」に書かれているが，今すぐ読むには難しい．この教程は書かれてからすでに50年が経ち，最新の成果は入っていないが，いまだにバイブルとしての地位を保っている．理論物理学をやるにはこれを総てマスターしなくてはならないと言われるが，私の周りにそういう人はいない．

ランダウはあらゆるレベルの教科書を書きたいと思っていたらしい．(ただし彼はものを書くのは苦手な人で，どの本もアイデアはランダウで実際に書いたのは共著者の方と言われている．)今は絶版になっているが

ランダウ，アヒエゼール，リフシッツ「物理学—力学から物性論まで—」

小野周，豊田博慈訳，岩波書店，1969年

も，大学初年級向けの名著なのでついでに挙げておく．残念ながら絶版らしい．

相対論に話を戻すと，アインシュタインが26歳のときに書いた特殊相対性理論についての原論文，とくにその第1部は，ほとんど高校の数学しか使っていない特異な論文である．いろいろ翻訳は出ているが，優れた脚注と解説のついた次の本がよい．

アインシュタイン「相対性理論」 内山龍雄訳，岩波文庫，1988年

この論文「運動する物体の電気力学」には脚注も引用文献もない．そのくらい

独創的だと説明されることもあるが、空間座標と時間が二つの慣性系のあいだでどのように関係しているかは、アインシュタイン以前にオランダのローレンツとフランスの数学者のポアンカレが導いている。そういう意味では引用なしは問題ありだが、内容の単純さと深さにおいて最高の論文であることは間違いない。次節にその最初の部分を資料として載せておく。

相対論の最近の発展については

日本物理学会編「アインシュタインとボーア」, 裳華房, 1999年

がよいだろう。第5章 霜田光一「光の速さを測る—相対論入門—」にマイケルソンの実験の説明がある。

この資料の力学や相対性理論に関する内容は、大部だが次の本で説明されている。

ファインマン, レイトン, サンズ「ファインマン物理学 I 力学」

坪井忠二訳, 岩波書店, 1967年

ガリレイの相対性原理を利用した運動量保存則の導出もこの本に詳しく紹介されている。このファインマンの講義録のシリーズは、物理学の数ある教科書の中で最も面白いものだ。ただし、必ずしも系統的に話が進められていないので、これだけ勉強すればすべてOKとはならないが、ぜひ読みたい本だ。他の巻は

ファインマン, レイトン, サンズ「ファインマン物理学 II 光, 熱, 波動」

富山小太郎訳, 岩波書店, 1968年

ファインマン, レイトン, サンズ「ファインマン物理学 III 電磁気学」

宮島龍興訳, 岩波書店, 1969年

ファインマン, レイトン, サンズ「ファインマン物理学 IV 電磁波と物性」

戸田盛和訳, 岩波書店, 1971年

ファインマン, レイトン, サンズ「ファインマン物理学 V 量子力学」

砂川重信訳, 岩波書店, 1979年

力学と相対性理論は第1巻に、電磁気学との関係は第3巻に説明されている。高校で物理を学んだ人ならば最初の2巻は読めるはず。

7 資料: アインシュタイン著「動いている物体の電気力学」より

アインシュタインの相対性理論の原論文「動いている物体の電気力学」(内山龍雄訳, 岩波文庫, 1988年)

動いている物体の関与する電磁現象を、マックスウェルの電気力学を用いて説明しようとする場合—今日、われわれが正しいものと認めている解釈によれば—たとえば、ある二つの現象が本質的には同じものと考えられるにもかかわらず、その電気力学的説明には大きな違いの生ずるという場合がある。よく知られている例として、1個の磁石と、1個の電気の導体との間の電気力学的根元作用について考えてみよう。このとき導体内に電流が発生するという現象が観測される。この現象は導体の磁石に対する相対的運動だけによることが分かっている。ところが電気力学による、普通よく知られている解釈によれば、磁石と導体のうちの一方が静止しており他が動いている場合と、これら両者の状態を逆にした場合とでは、電流発生に対する説明はまったく異なったものとなる。いま磁石は動いており、導体は静止しているとすれば、磁石の周囲には、あるエネルギーをもった電場が発生し、導体内の各点において、この電場は、それぞれそこに電流を生みだす。これとは逆に、磁石は静止し、導体が動いているときは、磁石の周囲には電場は発生しない。しかし導体の内部には、電気の流れを引き起こす起電力が生まれる。この起電力自身には、他にエネルギーを与えるという能力はないが、導体内に電流を発生させる。もしこれら二つの例で、導体の磁石に対する相対的運動が同じであると仮定するならば、はじめの例で、二次的に発生した電場の生みだす電流と、第2の例で、起電力が生みだす電流とは、その量においても、また流れの向きについても、まったく同じである。

上述の話と同じようないくつかの例や、“光を伝える媒質”に対する地球の相対的な速度を確かめようとして、結局は失敗に終わったいくつかの実験をあわせ考えるとき、力学ばかりでなく電気力学においても、絶対静止という概念に対応するような現象はまったく存在しないという推論に到達する。いやむしろ次のような推論に導かれる。すなわち、どんな座標系でも、それを基準にとったとき、ニュートンの力学の方程式が成り立つ場合[このような座標系は、現在では慣性系と呼ばれている]、そのような座標系のどれから眺めても、電気力学の法則および光学の法則はまったく同じであるという推論である。この推論は1次の程度の正確さで、既に実験的にも証明されている。そこでこの推論(その内容をこれから“相対性原理”と呼ぶことにする)をさらに一步推し進め、物理学の前提としてとりあげよう。また、これと一見、矛盾しているように見える次の前提も導入しよう。すなわち、光は真空中を、光源の運動状態に無関係な、ひとつの定まった速さ c をもって伝播するという主張である。静止している物体に対するマックスウェルの電気力学の理論を出発点とし、運動している物体に対する、簡単に矛盾のない電気力学に到達するためには、これら二つの前提だけで十分である。ここに、これから展開される新しい考え方によれば、特別な性質を与えられた“絶対静止空間”というようなものは物理学には不要であり、

また電磁現象が起きている真空の空間のなかの各点について、それらの点の“絶対静止空間”に対する速度ベクトルがどのようなものかを考えることも無意味なことになる。このような理由から、“光エーテル”[光を伝える媒質の役目をになうエーテル]という概念を物理学にもちこむ必要のないことが理解されよう。

これから展開される理論では—他のどんな電気力学でもするように—剛体の運動学をその基礎とする。なぜならば、どのような理論でも、そこに述べられることは、剛体(座標系)および時計と電磁的過程との間の関係に関する主張であるからである。動いている物体の電気力学を考究しようとするとき、われわれが直面するいろいろの困難はすべて、上に述べたような事柄に対して、いままでに、十分な考察をしなかったことがその原因である。

I. 運動学の部

§1, 同時刻の定義

いま、ひとつの座標系があるとし、これを基準にとるとき、ニュートン力学の方程式が成りたつとしよう。この座標系を、後にでてくる他のいろいろな座標系と、呼び名の上で区別するために、またこの座標系のもつ概念を厳密にするために、これを“静止系”と呼ぶことにする。

ひとつの質点がこの座標系に対して静止しているとする。この座標系に対する質点の位置は、剛体でできた物指を用いて、ユークリッド幾何学の方法により決定され、直交座標を用いて表わされる。

つぎに質点の運動を書き表わすには、質点の座標の値を時間の関数として表現すればよい。ここで次のことに注意しなければならない。すなわち“時間”とは何を意味するかが、あらかじめ明確にされているときにはじめて、上に述べたような数学的な表現は、物理学的意味を持つようになるということである。ところで、われわれの判断のうち、そこで時間が役割をになう場合には、そのような判断はすべて、いくつかの出来事が同時刻に起きたか否かに対する判断であるということを念頭におかねばならない。たとえば、私が“あの列車は7時にここに到着する”と言ったとき、それは“私の時計の短針が7を指すということと、列車の到着とは同時刻に起きる出来事である”ということの意味する¹⁴。

“時間”の定義に関連して起こる問題はすべて、“時間”を、“私の時計の短針の位置”によって置きかえることにより解決することができそうに思われる。もし時計の置かれているひとつの特定の場所の時間だけを問題にする場合には、このような時間の定義で十分である。しかし種々の場所に起きた一連の事件を互いに時間的に間連づけようとする場合、あるいは—同じことになるが—時計が

¹⁴同一(あるいはほとんど同一)の場所で起きた二つの事件の間の同時刻という概念の中にひそんでいる不精確さ、そしてこれもまた、抽象化という方法で解決されねばならないものであるが、これについては、ここでは深く議論しないことにする。

ら離れた場所に起きた事件の発生時刻の数値を問題にしようとするれば、このような定義では、もはや十分ではない。

勿論、われわれは次のような時間のきめ方で満足できるかもしれない。いま、ある場所で事件が起きたとしよう。この事件の発生の時刻を数値的にきめるために、事件の発生と同時に、その場所から、座標系の原点にいる観測者に向かって、事件の発生を知らせる光の信号を発射する。この光が真空の空間を通過して観測者にとどいた瞬間に、観測者の持っている時計の針が示す数値をもって、その事件の起きた時刻と定める、しかし時間のこのようなきめ方には、われわれが経験を通して知っているように、次のような欠点がある。すなわち、時計をもった観測者のいる場所を変更すれば、それに応じて、各々の事件に賦与された数値の示す時間的順序も違ったものになるという欠点である。そこでわれわれは、次に迷えるような考え方によって、より現実的な時間の定義法に到達できることを示そう。

いま空間の中の点 A にひとつの時計があるとする。A にいる観測者は、A のすぐ近くに起こる事件に対して、それらの事件が起きた瞬間に、A にある時計の針が示す数値を用いて、それらに時間的な数値を与えることができる。また空間の他の点 B にも、ひとつの時計があるとして、—この時計は“A にある時計とまったく同じ性能をもった時計 ”であるという前提を付け加えることにする。—このときは B にいる観測者もまた、同様に A のすぐ近くに起こる事件に時間的な数値を貼りつけることができる。しかし A に起きた事件と、B に起きた事件を時間的に比較することができるためには、これだけでは不可能で、さらに他の規則を定める必要がある。われわれがいままでに定義したものは、ひとつの“A 時間 ”、およびもうひとつの“B 時間 ”だけであり、A と B に共通な“時間 ”については何の定義も与えていない。A、B に共通な時間は、次のようにして定義される。すなわち、光が A から B に到達するのに要する“時間 ”は、逆に A から B に立ち戻るのに必要な“時間 ”に等しいという要請を定義として前提におくことである。この前提のもとに、ひとつの光線が、“A 時間 ”の t_A という瞬間に A を出発して B に向かい、“B 時間 ”の t_B という瞬間に B で反射され、“A 時間 ”の t'_A という瞬間に、A に立ち戻ったとする。もし

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

という関係が成立すれば、これら二つの時計は(定義により)合っている(等しい時間を表わしている)ということにする。

ここに述べた、“時計が合っている”という定義は、矛盾することなく成りたち、またいくらでも多くの異なる場所のそれぞれに置かれた時計に対しても適用できるものと仮定する。それゆえ、一般に次の関係が成りたつものと仮定する：

1. もし B の時計が，A にある時計と合っていれば，逆に A の時計は，B の時計と合っている．
2. A の時計が，B にある時計ばかりでなく，さらに C にある時計とも合っているならば，B，C にある時計は互いに合っている．

種々の場所に静かに置かれたそれぞれの時計が互いに合っている [等しい時間を表わしている] とは何を意味するのか，また “同時刻”，さらに “時間” とは何かといった問いに対して，いまや，われわれは，これまで述べてきたような (思考上の) 物理学的経験の助けをかりて，その定義を明確に与えたことになる．すなわち，ひとつの事件の発生の “時刻” とはその本件の起きた場所に静かに置かれている時計の針が，事件発生の瞬間に示す数値のことである，ただし，この時計は，それを用いて行われるすべての時間測定において，ある特定の場所 (例えば座標系の原点) に静かに置かれている特別な時計 [親時計と呼ぼう] と常に等しい時間を示す (合っている) ように調整されているものとする．

なおここで，経験に従って (A，B の間の距離を \overline{AB} と書くとき)，

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = c$$

という量が，ひとつの普遍定数 (真空中の光の速さ) であると仮定しよう．

静止系に静止している時計を用いて時間を定義したということは，非常に重要なことである．このように定義された時間を，それが静止系に依存しているという理由から “静止系の時間” と呼ぶことにする．

§2. 長さと時間の相対性

これから述べる議論は，相対性原理と光速不変の原理をその基礎におくものである．これら二つの原理は以下のように定義される．

1. 互いに他に対して一様な並進運動をしている，任意の二つの座標系のうちで，いずれを基準にとって，物理系の状態の変化に関する法則を書き表わそうとも，そこに導かれる法則は，座標系の選び方に無関係である．
2. ひとつの静止系を基準にとった場合，いかなる光線も，それが静止している物体，あるいは運動している物体のいずれから放射されたかには関係なく，常に一定の速さ c をもって伝播する．ここで光の速さとは

$$\text{速さ} = \frac{\text{光の進んだ距離}}{\text{伝播に要した時間}}$$

によって定義される．この定義で，“伝播に要した時間” の意味は，§1 の定義に従って理解されるべきものである．

さて、1本の剛体の棒が静かに置かれているとする。これを、同じく静止している物指を用いて測ったとき、その長さが l とする。次にこの棒が動いている場合を考えよう。いま棒の軸は静止系の X 軸に平行とする。この棒が X 軸にそい、軸上の点の位置を示す値 x が増加する方向に向かって、速さ v で、一様な並進運動をしているとする。そこでこれから、動いている棒の長さを問題としてとりあげよう。この長さについては、次のような二つの異なる操作によって、それぞれ異なる定義が考えられる：

- a) 観測者と、上に述べた物指が一体となって、長さを測ろうとしている問題の棒と一緒に動いているとする。この方法では、棒、観測者および物指の三者がすべて静止している場合とまったく同じように、物指を直接、棒の上に当てがうことによって、棒の長さを測ることができる。
- b) 静止系に静座している観測者が、§1の定義に従って互いに同一の時間を示すように調整された(静止系のいろいろの場所に固定されている)多数の時計の助けをかりて、それらが示すあるひとつの定まった時刻 t に、動いている棒の両端が、それぞれ静止系の中のどの点に合致するかを、まず見さだめる。このようにして見つかった2点の間の距離を、既に述べたような物指(ただしこの場合には静止系に静止している物指)を用いて測定した結果も、また同じように“棒の長さと呼ぶことのできるものである。

相対性原理によれば、操作 a) によって求められた長さ(これを“棒の伴走系¹⁵から見た、その長さ”と名づけよう)は静止している物指の長さ l に等しいはずである。

一方、操作 b) によって求められた長さ(これを“静止系に対し動いている棒の長さ”と呼ぼう)がいくらになるか、われわれは二つの原理を用いてこれを求めてみよう。なおそれ l とは異なった値となることが分かるであろう

従来、用いられている運動学では、上述の二つの操作によって決定される長さは、互いに完全に等しいということが、暗黙のうちに仮定されていた。換言すれば、動いている剛体の、ある瞬間 t における形は、それが静止している場合の姿と幾何学的にまったく同一であるということが仮定されていた。

ここでさらに、棒の両端[先頭がB後端がA]に、それぞれ1個の時計を取り付けたとしよう。これらの時計はいずれも[静止系の或るひとつの瞬間において]静止系に置かれた時計と合わせてあるとする。もっと厳密に言えば、AおよびBこ取り付けられた時計の示す時間は[静止系から見ると]、常にそれらの目の前にある静止系に置かれた時計の示す“静止系の時間”に対応するように調整されて

¹⁵訳者注: 棒と同じ速さで同じ方向に向かって走っている座標系を“棒の伴走系”と呼ぶことにする。この系から見れば、棒は静止して見えるから、“棒の静止系”と呼んでもよい。

いるものとする．それゆえこれら二つの時計は静止系から見たとき互いに合っている．

ここでさらに，A，Bそれぞれの時計のそばに，これらの時計と一緒に走っている観測者が1人ずついるとする．いま，この2人の観測者が，§1に確立した，時計の合っているか否かを調べるための判定法を，これら2個の時計に適用したとしよう．まず，時刻 t_A に¹⁶，Aから光線が発射され，時刻 t_B に，点Bで反射され，時刻 t'_A に，この光線はAに立ち戻ったとする．光速不変の原理を用いれば，次の関係が成立する [これは静止系から見た場合の関係式である]：

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v},$$

および

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v}.$$

ここで r_{AB} は，走っている棒を静止系から眺めた場合の長さを意味する．上の関係式をみると，棒と一緒に走っている観測者から見ると，A，B二つの時計は合っていない．一方，静止系に静座している観測者から見れば，両方の時計が同時刻を示していることは，既に述べたとおりである．

そこで，同時刻という概念に，絶対的な意味を与えてはならないことがわかる．すなわち，ある座標系から見たとき，二つの事件が同時刻であるとしても，この座標系に対して動いている他の座標系から見れば，それらの事件を互いに同時刻に起きたものと見なすわけにはいかないということがわかる．

¹⁶原著者注：ここで“時刻”とは“静止系の時間”を用いた時刻である．それは，また同時に，“走っている時計（それがいま問題にしている場所にちょうど，来合わせた瞬間に，その時計）の針の示す数値に対応する。”[原論文では， t_A はまた，光を発射した瞬間の，時計Aの示す時刻を“意味する”としているが，これは原著者の考え違いである．“対応する”という言葉に訂正されねばならない.]